This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Digitized by Google

Math. 205.

Math. 205

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT
900000066658

Digitized by Google

DU PROBLEME DES TROIS CORPS,

Par M. le Marquis DE CONDORCET.

Ut omnia candide legantur, & defectus in materia tàm difficili non tàm reprehendantur, quàm novis lectorum conatibus inveſtigentur, & benignè ſuppleantur, enixè rogo. NEWTON, *in fine Præfationis principio appoſitæ.*

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE DE DIDOT.

M. DCC. LXVII.

Digitized by Google

Digitized by Google

EXTRAIT

Des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 20 Décembre 1766.

MESSIEURS D'ALEMBERT & BEZOUT, qui avoient été nommés pour examiner trois Mémoires ſur différents objets de Méchanique & de Calcul, ayant pour titre général : *Du Problême des trois Corps*, l'Académie les a jugés dignes de ſon Approbation. Les Méthodes propoſées par l'Auteur dans ce nouvel Ouvrage, ne peuvent que confirmer l'opinion avantageuſe que le premier a donné des connoiſſances & des talens de l'Auteur. Fait à Paris, le 20 Décembre 1766.

GRANDJEAN DE FOUCHY, *Secrétaire Perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.*

APPROBATION.

J'AI lu par ordre de Monſeigneur le Vice-Chancelier, un Ouvrage intitulé *Problême des trois Corps*, par M. le Marquis DE CONDORCET, & il m'a paru que l'Impreſſion n'en pouvoit être que très avantageuſe & très agréable aux Géometres, par les nouvelles & excellentes vues qu'il contient, ainſi que par la ſagacité avec laquelle l'Auteur y traite les matieres les plus épineuſes de l'Analyſe & de la Méchanique. A Paris, le 18 Novembre 1766.

MONTUCLA.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Nos bien amés LES MEMBRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne ville de Paris, nous ont fait expoſer qu'ils auroient beſoin de nos Lettres de Privilege pour l'impreſſion de leurs Ouvrages : A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Expoſans, Nous leur avons permis & permettons par ces Préſentes de faire imprimer par tel Imprimeur qu'ils voudront choiſir, toutes les Récherches ou Obſervations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans

Digitized by Google

les Assemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Mémoires ou Traités de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils sont dignes de l'impression, en tels volumes, forme, marge, caracteres, conjointement ou séparement, & autant de fois que bon leur semblera, & de les faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de vingt années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes; sans toutefois qu'à l'occasion des Ouvrages ci dessus spécifiés, il en puisse être imprimé d'autres qui ne soient pas de ladite Académie : Faisons défenses à toutes sortes de personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, & débiter lesdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, sous quelque prétexte que ce puisse être, sans la permission expresse & par écrit desdits Exposans, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auxdits Exposans, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie; qu'avant de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages seront remis ès mains de notre très cher & féal Chevalier le sieur D'AGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres; & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique; un en celle de notre Château du Louvre, & un en celle de notredit très cher & féal Chevalier le sieur D'AGUESSEAU, Chancelier de France, le tout à peine de nullité des Présentes : du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir lesdits Exposans & leurs ayant cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la Copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés, féaux Conseillers & Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le dix-neuvieme jour du mois de Février, l'an de grace mil sept cent cinquante, & de notre Regne le trente-cinquieme. Par le Roi en son Conseil. MOL.

Registré sur le Registre XII de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 430, Fol. 309, conformément au Réglement de 1723, qui fait défenses, art. 4, à toutes personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour les vendre, soit qu'ils s'en disent les Auteurs, ou autrement; à la charge de fournir à la susdite Chambre huit Exemplaires de chacun, prescrits par l'art. 108 du même Reglement. A Paris le 5 Juin 1750.

Signé, LE GRAS, Syndic.

Digitized by Google

PREMIER MEMOIRE.

ANALYSE
D'UNE MÉTHODE GÉNÉRALE
DE RÉSOUDRE
LE PROBLÊME DES TROIS CORPS,

Leur maſſe étant ſuppoſée réunie en un point ſans étendue.

LE PROBLÊME des Trois Corps, ſur lequel je vais donner ici quelques vues, eſt un des plus célebres que les Géometres ſe ſoient propoſés dans ce ſiecle. Newton fit mouvoir dans les ellipſes de Képler, les planetes lancées dans le vuide & animées d'une force de gravitation. Il calcula dans des paraboles, les orbites elliptiques & preſque infiniment allongées des cometes. La Lune, le Satellite de notre globe, attirée en même-tems par le Soleil & par la Terre, ſe mouvoit dans une courbe irréguliere qui avoit échappé à toutes les hypotheſes & à toutes les tables dreſſées d'après les obſervations. Les cometes étoient troublées dans leur cours

Digitized by Google

par l'approche de quelques-unes de nos planetes. C'eſt à ces queſtions que s'arrêta Newton ; c'eſt d'après le réſultat du calcul, comparé à ce que donnent les obſervations, que les Diſciples de ce grand homme doivent, ou mettre la derniere main à ſon ſyſtême, ou en renverſer l'édifice hardi.

Trois corps mus dans l'eſpace d'un mouvement uniforme, s'attirent réciproquement en raiſon directe de leurs maſſes, & inverſe du quarré de leurs diſtances. Quel en eſt le mouvement? Voilà le problême général qu'il faut réſoudre.

La maſſe du Soleil eſt énorme par rapport à celles de la Terre & de la Lune : cet aſtre eſt à peine ébranlé par leur attraction ſur lui ; & on peut, dans ce cas particulier, n'y avoir aucun égard. La queſtion ſe réduit donc déja à trouver le mouvement de deux corps qui s'attirent mutuellement, & ſont en même-tems attirés vers un point fixe.

On ſait de plus quelle eſt la courbe du mouvement ſenſible de la Terre ; & cette connoiſſance réduit le problême, dans ce cas particulier, à trouver le mouvement d'un corps attiré vers un point fixe, & encore par un autre corps dont le mouvement eſt donné.

Ces problêmes ont néceſſairement deux parties. Leur nature ne nous permettant point d'en avoir les équations, ſans qu'il y entre des différentielles ; il faut, après avoir trouvé ces équations, en chercher l'intégrale, ou du moins les mettre ſous une forme à laquelle les méthodes connues s'appliquent facilement. Je donnerai pour

Digitized by Google

l'une & l'autre parties, des méthodes également utiles pour un nombre de corps quelconque, & qui, à mesure que le nombre des corps augmenteroit, exigeroient seulement de plus longs calculs, mais ne renfermeroient pas de nouvelles difficultés.

PREMIERE PARTIE DU PROBLÊME.

TROUVER les équations différentielles du mouvement de chacun des corps d'un système quelconque, en supposant que chacun de ces corps soit animé de certaines forces, & qu'il y ait entr'eux une attraction mutuelle.

SOLUTION. Soient ces corps M, M', M''. . . que M, M', M''. . . en désignent aussi les masses, & que, d'un point fixe dans l'espace, trois coordonnées rectangles déterminent la courbe du mouvement de chacun de ces corps. Soient ces coordonnées x, y, z, pour le corps M; x', y', z', pour le corps M'; x'', y'', z'', pour le corps M''. . . P, Q, R, les forces du corps M dans les directions de x, y, z; P', Q', R', celles de M'; P'', Q'', R'', celles de M''. . . Soient les distances entre le corps M & les corps M', M''. . . f, f', . . . les distances entre M' & M''. . . $f_{,}$. . . ensorte que

$$f = \sqrt{x - x'^2 + y - y'^2 + z - z'^2}.$$

$$f' = \sqrt{x - x''^2 + y - y''^2 + z - z''^2}.$$

$$f_{,} = \sqrt{x' - x''^2 + y' - y''^2 + z' - z''^2}. \quad \&$$

F, F'. . . les forces d'attraction entre M & M', M''. . . $F_{,}$. . . les forces d'attraction entre M' & M''. . . Soient

Digitized by Google

enfin u, u', u''... les vîteſſes des corps M, M', M''... $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, $ds' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$, $ds'' = \sqrt{dx''^2 + dy''^2 + dz''^2}$... les eſpaces parcourus par ces mêmes corps, & dt l'élément du tems, que je ſuppoſe conſtant.

Je ſuppoſe qu'au lieu de parcourir les eſpaces ds, ds', ds''... les corps parcourent les eſpaces $\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}s'$, $\mathrm{d}s''$... à cauſe d'un changement quelconque dans les forces (les différentielles affectées de la caractériſtique d étant abſolument indépendantes de celles qui ſont affectées de la caractériſtique ordinaire); la ſomme des forces néceſſaires pour opérer ce changement dans le ſyſtême, ſera

$$\int M.\ P\,\mathrm{d}x - dx + Q\,\mathrm{d}y - dy + R\,\mathrm{d}z - dz +$$
$$M'.\ P'\,\mathrm{d}x' - dx' + Q'\,\mathrm{d}y' - dy' + R'\,\mathrm{d}z' - dz' +$$
$$M''.\ P''\,\mathrm{d}x'' - dx'' + Q''\,\mathrm{d}y'' - dy'' + R''\,\mathrm{d}z'' - dz''\ldots$$
$$+ MM'F\,\mathrm{d}f - df \ldots + MM''F'\,\mathrm{d}f' - df' \ldots +$$
$$M'M''F_{,}\,\mathrm{d}f_{,} - df_{,}\ldots$$

& par conſéquent la ſomme de toutes les forces du ſyſtême ſera dans l'hypotheſe

$$\int M.P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z + M'.P'\,\mathrm{d}x' + Q'\,\mathrm{d}y' + R'\,\mathrm{d}z'$$
$$+ M''.P''\,\mathrm{d}x'' + Q''\,\mathrm{d}y'' + R''\,\mathrm{d}z'' \ldots + MM'F\,\mathrm{d}f +$$
$$MM''F'\,\mathrm{d}f' \ldots + M'M''F_{,}\,\mathrm{d}f_{,}\ldots$$

le ſigne d'intégration $\int$ ſe rapportant à la caractériſtique d. Multipliant par dt, élément du tems, j'aurai la quantité d'action qui, dans l'hypotheſe, s'exercera dans le ſyſtême. Mais, dans les mêmes ſuppoſitions, cette quantité d'action eſt auſſi $\int Mu\,dds + M'u'\,dd\,s' + M''u''\,dd\,s''\ldots$ &c. ces

Digitized by Google

deux expreſſions doivent être identiques entre elles. Donc $\int Mud\,ds + M'u'dd\,s' + M''u''dd\,s'' \ldots = M.\overline{Pdx + Qdy + Rdz}.dt - M'.\overline{P'dx' + Q'dy' + R'dz'}.dt - M''.\overline{P''dx'' + Q''dy'' + R''dz''}.dt \ldots - MM'Fdf.dt + MM''F'df'.dt \ldots - M'M''F_{,}df_{,}dt \ldots = 0$.

Je mets dans cette équation, pour $dd\,s$, ſa valeur $\frac{dx.ddx + dy.ddy + dz.ddz}{ds}$; pour $dd\,s'$, ſa valeur $\frac{dx'.ddx' + dy'.ddy' + dz'.ddz'}{ds'}$; pour $dd\,s''$, ſa valeur $\frac{dx''.ddx'' + dy''.ddy'' + dz''.ddz''}{ds''}$. J'intègre par partie, enſorte qu'il me reſte ſous le ſigne une fonction qui ne ſoit plus ſuſceptible de réduction; & j'ai, 1°. un terme hors du ſigne, qui ſera nul de lui-même, ou le deviendra en vertu de ſuppoſitions convenables, ſelon que la trajectoire ſera aſſujettie à paſſer par certains points, ou à d'autres ſuppoſitions; 2°. une fonction ſous le ſigne, qui ſera auſſi égale à zero : ce qui me donnera

$$\int M\,d.\frac{u\,dx}{ds} + MP\,dt + FMM'\frac{x-x'}{f}dt + FMM''\frac{x-x''}{f'}dt \ldots d\,x.$$

$$+ M\,d.\frac{u\,dy}{ds} + MQ\,dt + FMM'\frac{y-y'}{f}dt + FMM''\frac{y-y''}{f'}dt \ldots d\,y.$$

$$+ M\,d.\frac{u\,dz}{ds} + MR\,dt + FMM'\frac{z-z'}{f}dt + FMM''\frac{z-z''}{f'}dt \ldots d\,z$$

$$+ M' d. \frac{u' dx'}{ds'} + M'P' dt - FMM' \frac{x-x'}{f} dt + F,M'M'' \frac{x-x'}{f_1} dt \ldots dx'.$$

$$+ M' d. \frac{u' dy'}{ds'} + M'Q' dt - FMM' \frac{y-y'}{f} dt + F,M'M'' \frac{y'-y''}{f_1} dt \ldots dy'.$$

$$+ M' d. \frac{u' dz'}{ds'} + M'R' dt - FMM' \frac{z-z'}{f} dt + F,M'M'' \frac{z'-z''}{f_1} dt \ldots dz'.$$

$$+ M'' d. \frac{u'' dx''}{ds''} + M''P'' dt - FM'M'' \frac{x-x''}{f'} dt - F,M'M'' \frac{x'-x''}{f_1} dt \ldots dx''.$$

$$+ M'' d. \frac{u'' dy''}{ds''} + M''Q'' dt - FM'M'' \frac{y-y''}{f'} dt - F,M'M'' \frac{y'-y''}{f_1} dt \ldots dy''.$$

$$+ M'' d. \frac{u'' dz''}{ds''} + M''R'' dt - FM'M'' \frac{z-z''}{f'} dt - F,M'M'' \frac{z'-z''}{f_1} dt \ldots dz''.$$

Mais cette équation doit avoir lieu, quels que soient les dx, dy, dz, &c. Donc, égalant à zero chacun de leurs coefficiens, j'aurai perpétuellement entre les coordonnées & les vîtesses, les équations suivantes, qui seront pour chaque corps au nombre de trois.

Digitized by Google

1re. $M\,d.\frac{u\,dx}{ds} + MP\,dt + FMM'\frac{x-x'}{f}\,dt +$
$FMM''\frac{x-x''}{f'}\,dt \ldots = 0.$

2e. $M\,d.\frac{u\,dy}{ds} + MQ\,dt + FMM'\frac{y-y'}{f}\,dt +$
$FMM''\frac{y-y''}{f'}\,dt \ldots = 0.$

3e. $M\,d.\frac{u\,dz}{ds} + MR\,dt + FMM'\frac{z-z'}{f}\,dt +$
$FMM''\frac{z-z''}{f'}\,dt \ldots = 0.$

4e. $M'\,d.\frac{u'dx'}{ds'} + M'P'dt - FMM'\frac{x-x'}{f}\,dt +$
$F,M'M''\frac{x'-x''}{f,}\,dt \ldots = 0.$

5e. $M'\,d.\frac{u'dy'}{ds'} + M'Q'dt - FMM'\frac{y-y'}{f}\,dt +$
$F,M'M''\frac{y'-y''}{f,}\,dt \ldots = 0.$

6e. $M'\,d.\frac{u'dz'}{ds'} + M'R'dt - FMM'\frac{z-z'}{f}\,dt +$
$F,M'M''\frac{z'-z''}{f,}\,dt \ldots = 0.$

7e. $M''\,d.\frac{u''dx''}{ds''} + M''P''dt - FMM''\frac{x-x''}{f''}\,dt -$
$F,M'M''\frac{x'-x''}{f,}\,dt \ldots = 0.$

8e. $M''\,d.\frac{u''dy''}{ds''} + M''Q''dt - FMM''\frac{y-y''}{f''}\,dt -$
$F,M'M''\frac{y'-y''}{f,}\,dt \ldots = 0.$

9e. $M''\,d.\frac{u''dz''}{ds''} + M''R''dt - FMM''\frac{z-z''}{f''}\,dt -$
$F,M'M''\frac{z'-z''}{f'}\,dt \ldots = 0.$ Equations qui ſuffiront

dans tous les cas, pour avoir le mouvement de chacun des corps. C. Q. F. T.

REMARQUE I.

S'IL y avoit entre les coordonnées une ou plusieurs équations données, indépendantes de celles du problême, on substituera dans le terme qui reste sous le signe, la valeur d'une ou de plusieurs des différentielles affectées du signe d, tirée de ces équations; on égalera à zero le coefficient de chacune de celles qui restent : & ces équations, jointes aux équations données, serviront à résoudre le problême.

REMARQUE II.

PUISQUE le coefficient de chacune des différentielles affectées de la caractéristique d est nul, il est clair qu'en mettant dans la fonction sous le signe, dx à la place de dx, & ainsi de suite, on aura une fonction qui sera aussi égale à zero. Développant ensuite tous ces termes, puis réduisant, & substituant pour $\frac{dds}{dt}$ sa valeur du, on aura

$$Mudu + M'u'du' + M''u''du'' \ldots + M.\overline{Pdx + Qdy + Rdz} + M'.\overline{P'dx' + Q'dy' + R'dz'} + M''.\overline{P''dx'' + Q''dy'' + R''dz''} + MM'Fdf + MM''F'df' \ldots + M'M''F,df, \ldots = 0:$$

équation qui est la même que celle que donne le principe des forces vives, & qui renferme ce principe.

REMARQUE III.

TOUTES les fois que le mouvement est possible, la fonction

fonction égalée ci-dessus à zero peut être regardée comme intégrable; mais dans ce cas j'ai $Mu\,du + M'u'\,du' + M''u''\,du'' \ldots + M.\overline{P\,dx + Q\,dy + R\,dz} + M'.\overline{P'\,dx' + Q'\,dy' + R'\,dz'} + M''.\overline{P''\,dx'' + Q''\,dy'' + R''\,dz''} \ldots + MM'F\,df + MM''F'\,df' \ldots + M'M''F_{,}\,df_{,} \ldots = 0$. Donc, comparant cette équation avec celle du problême, j'aurai $\int Mu\,ds\,ds + Mu\,du\,dt + M'u'\,ds\,ds' + M'u'\,du'\,dt + M''u''\,ds\,ds'' + M''u''\,du''\,dt \ldots = 0$. Donc, mettant pour u, u', u'' \ldots leurs valeurs $\frac{ds}{dt}$, $\frac{ds'}{dt}$, $\frac{ds''}{dt}$ \ldots j'aurai $\int Mu\,ds\,ds + M\,ds\,du + M'u'\,ds\,ds' + M'\,ds'\,du' + M''u''\,ds\,ds'' + M''\,ds''\,du'' \ldots = 0$; & réduisant, $\int d.Mu\,ds + M'u'\,ds' + M''u''\,ds'' \ldots = 0$, ou $d.\int Mu\,ds + M'u'\,ds' + M''u''\,ds'' \ldots = 0$. Donc $\int Mu\,ds + M'u'\,ds' + M''u''\,ds''$.. est un *minimum*. Donc le principe de la moindre action a lieu toutes les fois que le mouvement est possible, mais ne peut être employé pour trouver les équations du problême, que lorsque la formule ci-dessus est immédiatement intégrable. Cela a été aussi remarqué par M. de la Grange.

SECONDE PARTIE DU PROBLÊME.

Pour avoir les équations du premier cas du problême, il est aisé de voir qu'il n'y a qu'à faire, dans les neuf équations ci-dessus, P, Q, R; P', Q', R'; P'', Q'', R'', égaux à zero, & $F = \frac{1}{f}$, $F' = \frac{1}{f'}$, $F_{,} = \frac{1}{f_{,}}$. Je fais ensuite dans ces équations, $u = \frac{ds}{dt}$, $u' = \frac{ds'}{dt}$, $u'' = \frac{ds''}{dt}$,

Digitized by Google

& elles deviennent

$$1^{re}.\ ddx + M'\frac{x-x'}{f^3}dt^2 + M''\frac{x-x''}{f''^3}dt^2 = 0,$$

$$2^{e}.\ ddy + M'\frac{y-y'}{f^3}dt^2 + M''\frac{y-y''}{f''^3}dt^2 = 0,$$

$$3^{e}.\ dd\zeta + M'\frac{\zeta-\zeta'}{f^3}dt^2 + M''\frac{\zeta-\zeta''}{f''^3}dt^2 = 0,$$

$$4^{e}.\ ddx' - M\frac{x-x'}{f^3}dt^2 + M''\frac{x'-x''}{f_i^3}dt^2 = 0,$$

$$5^{e}.\ ddy' - M\frac{y-y'}{f^3}dt^2 + M''\frac{y'-y''}{f_i^3}dt^2 = 0,$$

$$6^{e}.\ dd\zeta' - M\frac{\zeta-\zeta'}{f^3}dt^2 + M''\frac{\zeta'-\zeta''}{f_i^3}dt^2 = 0,$$

$$7^{e}.\ ddx'' - M\frac{x-x''}{f''^3}dt^2 - M'\frac{x'-x''}{f_i^3}dt^2 = 0,$$

$$8^{e}.\ ddy'' - M\frac{y-y''}{f''^3}dt^2 - M'\frac{y'-y''}{f_i^3}dt^2 = 0,$$

$$9^{e}.\ dd\zeta'' - M\frac{\zeta-\zeta''}{f''^3}dt^2 - M'\frac{\zeta'-\zeta''}{f_i^3}dt^2 = 0.$$

Pour avoir maintenant les équations des courbes que décrivent les corps, j'élimine dt^2, & j'ai les huit équations ſuivantes:

$$1^{re}.\ \frac{ddx}{M'\frac{x-x'}{f^3} + M''\frac{x-x''}{f''^3}} = \frac{ddy}{M'\frac{y-y'}{f^3} + M''\frac{y-y''}{f''^3}},$$

$$2^{e}.\ \frac{ddx}{M'\frac{x-x'}{f^3} + M''\frac{x-x''}{f''^3}} = \frac{dd\zeta}{M'\frac{\zeta-\zeta'}{f^3} + M''\frac{\zeta-\zeta''}{f''^3}},$$

$$3^{e}.\ \frac{ddx'}{M''\frac{x'-x''}{f_i^3} - M\frac{x-x'}{f^3}} = \frac{ddy'}{M''\frac{y'-y''}{f_i^3} - M\frac{y-y'}{f^3}},$$

$$4^{e}.\ \frac{ddx'}{M''\frac{x'-x''}{f_i^3} - M\frac{x-x''}{f''^3}} = \frac{dd\zeta'}{M''\frac{\zeta'-\zeta''}{f_i^3} - M\frac{\zeta-\zeta'}{f^3}},$$

Digitized by Google

$$5^{e}.\quad \frac{dd\,x''}{M\,\frac{x-x''}{f'^{3}}+M'\,\frac{x'-x''}{f_{,}^{3}}}=\frac{dd\,y''}{M\,\frac{y-y''}{f'^{3}}+M'\,\frac{y'-y''}{f_{,}^{3}}},$$

$$6^{e}.\quad \frac{dd\,x''}{M\,\frac{x-x''}{f'^{3}}+M'\,\frac{x'-x''}{f_{,}^{3}}}=\frac{dd\,z''}{M\,\frac{z-z''}{f'^{3}}+M'\,\frac{z'-z''}{f_{,}^{3}}},$$

$$7^{e}.\quad \frac{dd\,x}{M'\,\frac{x-x'}{f^{3}}+M''\,\frac{x-x''}{f'^{3}}}=\frac{dd\,x'}{M''\,\frac{x'-x''}{f_{,}^{3}}-M\,\frac{x-x'}{f^{3}}},$$

$$8^{e}.\quad \frac{dd\,x}{M'\,\frac{x-x'}{f^{3}}+M''\,\frac{x-x''}{f'^{3}}}=\frac{-dd\,x''}{M\,\frac{x-x''}{f'^{3}}+M'\,\frac{x'-x''}{f_{,}^{3}}}.$$

Et l'on pourroit, au lieu des équations 7e. & 8e. en avoir d'autres ſemblables en ddy & ddy', ddy & ddy'', ou $dd\,z$ & $dd\,z'$, $dd\,z$ & $dd\,z''$. Cela poſé, il eſt aiſé de voir qu'y ayant neuf variables & huit équations, on pourra éliminer par les méthodes connues, enſorte qu'il ne reſte plus que des équations entre deux variables, telles qu'elles doivent être pour déterminer le mouvement de chaque corps, & leur poſition reſpective à chaque inſtant. Mais, quoique la méthode que j'ai donnée dans mon précédent Ouvrage ſoit générale, elle demande de ſi longs calculs, même pour le premier ordre, qu'il n'en faut eſpérer immédiatement aucun ſecours pour des équations de l'eſpece de celles-ci, qui monteront naturellement au vingtieme ordre. Il me faut donc chercher ici d'autres ſecours; & c'eſt dans la nature du problême que j'eſpere les trouver.

Je remarque donc, 1°. que le mouvement du corps M doit être donné par une équation en x & en y, & par une équation en x & en z, ou bien en y & en z; le

mouvement du corps M' par une équation en x' & y', & par une équation en x' & z', ou bien en y' & z'; le mouvement enfin du corps M'' par une équation en x'' & y'', & une équation en x'' & z'', ou bien y'' & z''; & que la position respective de ces corps dans l'espace pour chaque instant sera donnée par une équation en x & x', & une équation en x & x'', ou, si l'on veut, par deux équations, soit en y & y', & en y & y'', soit en z & z', & en z & z''.

2°. Que, puisque les forces qui agissent sur les corps sont semblablement composées des coordonnées x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; & que la masse des corps, leur vîtesse primitive, leur premiere position dans l'espace, toutes quantités constantes, sont les seules choses qui fassent que le mouvement d'un de ces corps ne soit pas celui d'un autre; il est aisé de voir que, 1°. les équations en x & y, x & z; x' & y', x' & z'; x'' & y'' x'' & z'', seront semblables, & ne différeront que par les coefficiens constans; c'est-à-dire qu'on aura dans l'équation en x' & y', ou en x'' & y'', des fonctions de x' & y', ou de x'' & y'', semblables à celles de x & y qui entrent dans l'équation en x & y, & qu'il en sera de même des équations en x & z, x' & z', x'' & z''. 2°. Que les équations qu'on auroit en y & y', y & y'', z & z', z & z'', seront également semblables aux équations qu'on aura entre x & x', x & x''. 3°. Que les équations en x & y, x & z, seront telles que les fonctions de y qui entreront dans la premiere, seront semblables à celles de z qui entreront dans la seconde, & qu'il en sera de même des équations en x' & y', x' & z', ou x'' & y'', x'' & z''. 4°. Enfin, que

Digitized by Google

dans ces équations, les fonctions égalées à zero ſeront ſemblablement compoſées des variables x & y pour l'équation en x & y, des variables x & z pour l'équation en x & z, & ainſi pour toutes les autres équations. D'où il ſuit, & de ce qu'on doit tirer des équations en x & y, x & z, une équation en y & z ſemblablement compoſée de ces deux variables, & d'une maniere ſemblable à celle dont l'équation en x & y eſt compoſée de x & y; il ſuit, dis-je, qu'on doit avoir une fonction de x égale à une fonction ſemblable de y, & ainſi pour les autres équations. Tout ceci s'accorde parfairement avec la forme des équations que j'ai trouvées dans la premiere Partie du Problême; car ſi l'on joint aux huit ci-deſſus, les autres équations qu'on en peut déduire, on verra que les neuf variables y entrent d'une maniere ſemblable.

Je remarque, en troiſieme lieu, que ſi je joins aux huit équations dont je viens de parler, une équation entre le tems & une quelconque des coordonnées, j'aurai toutes les équations néceſſaires pour réſoudre le problême; que j'aurai par conſéquent une équation entre t & chacune des coordonnées; que ces équations ſeront ſemblables, & que ces neuf équations entre t & chacune des coordonnées ſuffiront auſſi pour réſoudre le problême.

Je remarque enfin, que ſi au commencement du mouvement je ſuppoſe à chacune des coordonnées une valeur donnée, j'aurai la poſition primitive de chacun des corps dans l'eſpace; que leur direction primitive ſera donnée pour M par les valeurs de $\frac{dx}{dy}$ & $\frac{dx}{dz}$ dans cet inſtant,

Digitized by Google

pour M' par les valeurs de $\frac{dx'}{dy'}$ & $\frac{dx'}{dz'}$, pour M'' enfin par les valeurs de $\frac{dx''}{dy''}$ & $\frac{dx''}{dz''}$; que leur vîteſſe primitive ſera donnée par les valeurs de $\frac{ds}{dt}$, $\frac{ds'}{dt}$, $\frac{ds''}{dt}$. D'où il ſuit, qu'en général il doit reſter dix-huit conſtantes arbitraires dans les équations finies du problême. Donc, puiſque ces équations ſont au nombre de neuf entre t & chacune des coordonnées, & qu'elles ſont toutes ſemblables entre elles, chacune de ces équations en contiendra deux ſemblablement placées dans chaque équation. Il ſuit de-là, que chacune des huit équations en deux des coordonnées en paroîtra contenir quatre, qui ſe réduiront à trois en changeant l'équation de forme; que la laiſſant ſous la forme où elle en contiendroit quatre, la même coordonnée ſe trouvant dans deux équations, leurs huit arbitraires ſe réduiſent à ſix par la nature du problême; & que ſix de ces équations ſuffiſant pour que toutes les fonctions ſemblables de chaque variable ſoient déterminées, toutes les arbitraires ſe réduiront à dix-huit, comme on ſait déja que cela doit être. Les coefficiens conſtans déterminés ſeront auſſi, dans chaque équation, compoſés de fonctions ſemblables des M, M', M''; & ces nombres conſtans ſeront les mêmes dans chaque équation.

De tout ce que je viens de dire, il n'eſt pas difficile de conclure que, de quelque maniere que je combine mes neuf équations entre t & chacune des coordonnées, ſans pourtant chaſſer t, je ne pourrai, à chaque différenciation, éliminer dans les équations non ſéparées,

Digitized by Google

plus d'arbitraires ou de fonctions tranſcendantes, que je n'en pourrois éliminer dans les équations ſéparées; mais que par la combinaiſon des deux équations qui ont lieu entre trois coordonnées, je puis par deux différenciations éliminer quatre fonctions tranſcendantes qui ſe réduiſent à trois, & quatre arbitraires qui ſe réduiſent auſſi à trois. Donc, puiſque les équations non ſéparées du problême ſont du ſecond ordre, je ne puis avoir entre t & chacune des coordonnées, que des équations ſéparées qui contiennent deux fonctions tranſcendantes & deux variables; d'où il naîtra une équation algébrique du ſecond ordre entre t & chaque coordonnée, & entre deux coordonnées quelconques où il n'y aura point d'arbitraire. Donc il y aura d'ailleurs entre les différentes coordonnées, des équations du troiſieme ordre auſſi algébriques & ſans arbitraires; & ce ſont les équations ſéparées qui répondront aux équations non ſéparées du problême.

Maintenant je ſuppoſe que j'élimine non ſeulement t, mais auſſi toutes les coordonnées, enſorte qu'il ne me reſte plus qu'une équation entre deux coordonnées, x & y par exemple; ſi j'ai éliminé enſorte que, quoique j'aie différencié, je n'aie pas introduit de nouvelles arbitraires, j'aurai une équation qui aura pour ſolution incomplette une équation algébrique ſéparée, du ſecond ordre, & une du troiſieme : & il eſt clair que cette opération eſt toujours poſſible dans ce cas.

Cette opération une fois exécutée, j'aurai une équation ſéparée qui ne doit avoir pour ſolution qu'une équation

Digitized by Google

différentielle algébrique du troiſieme ordre, & une équation différentielle algébrique du ſecond ſans arbitraires. Pour en tirer les ſolutions, je me ſers des deux méthodes ſuivantes. Prenant d'abord les équations que me donne le Problême VII de la Section I de la premiere Partie de mon Eſſai ſur le Calcul Intégral pour les équations de condition, & les comparant avec l'équation que j'ai ici à traiter, je parviendrai enfin à une équation du troiſieme ordre ſans arbitraires, ou à une du ſecond, ou immédiatement peut-être à toutes deux, puiſqu'elles ſont toutes deux contenues dans la propoſée, ſi on a ſoin de ne négliger aucune des équations que peut faire naître la comparaiſon de la propoſée avec ſes équations de condition.

La ſeconde méthode que je vais propoſer, eſt abſolument la même que la précédente; mais elle eſt plus commode en quelque ſorte pour le cas préſent, quoiqu'en elle-même elle lui ſoit inférieure & en généralité & en ce que les équations qu'elle donne ne ſe peuvent mettre ſous une formule générale, comme celles du Problême VII cité ci-deſſus. Je ſuppoſe que j'aie entre deux variables dont aucune différence premiere n'eſt ſuppoſée conſtante, une équation différentielle d'un ordre ſupérieur au premier; l'intégrale finie complette qu'elle pourra avoir, pourra contenir, outre des arbitraires conſtantes, une nouvelle variable quelconque, dont la différence ſoit conſtante. Si je ſuppoſe que dans cette équation la premiere différence d'une des variables ſoit conſtante, il eſt clair que l'intégrale finie de cette nouvelle

nouvelle équation ſera la même que ci-deſſus, ſi ce n'eſt que la nouvelle variable, dont la différence étoit conſtante, ſera alors une des variables de l'équation.

Je ſuppoſe maintenant que j'aie entre deux variables une équation différentielle où une des différences ſoit ſuppoſée conſtante, & que je veuille la changer en une équation où aucune des différences ne le ſoit; pour cela je remarque que, ſoit x & y les variables & dx conſtant, je peux, à cauſe de l'homogénéité des différences, diſpoſer les différences de y enſorte que je n'aie que dy, $\frac{ddy}{dx}$, $\frac{d^3y}{dx^2}$, $\frac{d^4y}{dx^3}$, &c. ou à cauſe de dx conſtant dy, $d.\frac{dy}{dx}$, $d.\frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx}$, $d.\frac{d.\frac{dy}{dx}}{d.\frac{dx}{dx}}$, &c. Donc pour avoir une équation où rien ne ſoit conſtant, & dont l'intégrale ſoit la même que la propoſée, ſauf l'exception ci-deſſus, je n'aurai qu'à ſubſtituer dans la propoſée les valeurs des formules ci-deſſus priſes dans l'hypotheſe où tout varie, au lieu de leurs valeurs priſes dans l'hypotheſe où une des différences eſt conſtante. Cela poſé, il eſt clair qu'une équation entre deux variables où aucune différence n'eſt ſuppoſée conſtante, & qui admet une ſolution finie complette, doit être telle qu'en ſuppoſant une différentielle conſtante, puis faiſant les ſubſtitutions indiquées ci-deſſus, l'équation qui en réſultera ſoit identiquement la même que la propoſée, dans le cas où l'intégrale de la propoſée ne contiendroit pas de nouvelle variable arbitraire. Lorſque la propoſée n'admet qu'une ſolution finie incomplette, ou, ce qui dans ce cas revient au même, une ſo-

lution du premier ordre; alors ſuppoſant que, dans la propoſée & la ſubſtituée, les plus hautes différences ſoient ſous une forme linéaire, & donnant l'unité pour coefficient dans l'une & l'autre à l'une de ces différences, je dois avoir les coefficiens de l'autre différence égaux entre eux. Si en les égalant, j'ai une équation qui ne ſoit pas identique, alors je traite cette équation comme la propoſée. Si l'équation eſt identique, comme les derniers termes des deux équations ſont auſſi égaux, mais dans l'hypotheſe préſente ne ſont pas identiques, j'aurai en les égalant une équation que je traiterai comme la propoſée. Continuant toujours ainſi, je parviendrai à une équation identique avec la ſubſtituée qui lui convient; car lorſqu'une équation d'un ordre ſupérieur a pour intégrale une équation d'un ordre inférieur ſans arbitraires, & qui admet une ſolution complette, cette équation & ſes différences ont été combinées enſemble, & la propoſée ne differe de ſes ſubſtituées que par-là; l'équation trouvée par cette méthode ſera l'intégrale incomplette de la propoſée. On aura par le même moyen l'intégrale complette des équations dans les arbitraires deſquelles entre une nouvelle variable; & on l'aura inférieure d'autant de degrés à la propoſée, qu'il y aura d'arbitraires conſtantes affectées de cette nouvelle variable, & par-là même quelquefois du premier, lorſque la nouvelle variable affectera toutes les arbitraires conſtantes, hors une. En effet, l'intégrale incomplette n'eſt telle, que parceque l'intégrale complette de la propoſée contient la nouvelle variable, ou l'intégrale de la ſubſtituée ne contient qu'une des variables de l'équation; d'où

Digitized by Google

il ſuit que ces deux intégrales ne peuvent être les mêmes qu'en égalant à zéro les coefficiens conſtans arbitraires; ou, ce qui revient au même, on a produit la ſubſtituée en diviſant par la différence ſuppoſée conſtante à chaque différentiation, ce qu'on n'a point fait pour produire la propoſée : d'où les termes conſtans que chaque différentiation rend arbitraires doivent être ſuppoſés nuls, pour que les deux intégrales ſoient les mêmes. La ſolution incomplette étant trouvée, on aura aiſément la ſolution complette, d'après ce que je viens de dire. En effet, il n'y a qu'à chercher à produire la propoſée ou la ſubſtituée avec cette intégrale incomplette, pour voir comment étoient placées les arbitraires conſtantes qu'on a ſuppoſées nulles. Cette méthode s'applique à un nombre quelconque de variables, en y faiſant les changemens qu'exige la différence des cas, & qui n'auront aucune difficulté. On voit auſſi qu'on auroit pu ſe diſpenſer de ſuppoſer les différences ſupérieures ſous une forme linéaire. Il eſt aiſé de voir par la nature de cette méthode, qu'elle ne doit point donner les ſolutions incomplettes des ordres plus élevés que le premier, lorſque ces ſolutions n'ont point elles-mêmes d'intégrales. Elle ne donnera donc, dans le cas du problême que je traite, que l'équation du troiſieme ordre, qui admet une ſolution complette.

On pourra, lorſqu'il ſera queſtion de réſoudre le préſent problême, employer d'abord la ſeconde méthode, qui conduira à l'équation du troiſieme ordre qu'on doit avoir entre deux coordonnées quelconques. On tâchera enſuite de tirer auſſi, par la premiere méthode, l'équation du ſe-

cond ordre entre les mêmes coordonnées, qui entre aussi dans les équations du problême; & on abrégera cette recherche en négligeant de traiter les équations que donne la premiere méthode, & que la seconde auroit aussi données. Si malgré tout cela on n'avoit pas encore cette seconde équation, on la trouveroit toujours en combinant diversement les équations de la methode avec celles du problême, puisque cette seconde équation y est contenue.

Ayant une fois une équation du troisieme ordre entre deux coordonnées quelconques, on en aura aisément entre les autres coordonnées, puisqu'elles doivent être semblables. Il en sera de même de l'équation du second ordre, où de plus les variables se sépareront d'elles-mêmes, dont chaque membre s'égalera à dt^2 multiplié par un coefficient constant, qu'on déterminera aisément à l'aide des équations du problême; d'où, par les méthodes connues, on réduira facilement l'équation du second ordre entre dt & chacune des variables, en une équation du premier. Il pourroit se faire qu'au lieu d'équation du troisieme ordre, on n'en eût qu'une du second, & qu'ainsi nos deux équations entre les coordonnées se réduisissent à une seule. Ce cas seroit le plus simple de tous.

Je passe maintenant au second cas du problême, & supposant que ce soit le corps dont la masse est M'' qui soit immobile & fixe, & qu'il soit placé à l'origine des coordonnées, il est clair que les neuf équations trouvées ci-dessus, se réduiront aux six premieres, dans lesquelles il faudra faire x'', y'', z'', égaux à zero. Les réflexions que je viens de faire s'appliquant à ce cas comme au précédent,

Digitized by Google

on le réſolvera donc de même, excepté que les équations ſéparées ſeront moins élevées & le problême moins compliqué.

Quant au troiſieme cas, ſuppoſant, comme dans le ſecond, que M'' ſoit le corps immobile, & M' le corps dont le mouvement eſt connu, j'aurai par l'hypotheſe y' en x' & z' en x' : je ſubſtitue ces valeurs dans les ſix équations qui me reſtent, je prends des trois dernieres la valeur de x' qu'elles me donnent, je la ſubſtitue dans les premieres, & il ne me reſte plus que trois équations entre le tems & les trois coordonnées du corps M, qui me ſuffiront pour réſoudre le problême, & auxquelles les réflexions que j'ai faites s'appliquent d'elles-mêmes.

Il eſt aiſé de voir que tout ce que je viens de dire pour trois corps eſt également vrai pour quatre, cinq, ſix, &c. & s'y applique également, & que les équations ſéparées & trouvées par la méthode, pourront être plus compliquées, mais non d'un ordre plus élevé, & qu'ainſi les difficultés ſeront toujours de la même nature, quelque ſoit le nombre de ces corps.

Digitized by Google

Digitized by Google

SECOND MEMOIRE.

ANALYSE

Du Probleme où il s'agiroit de trouver le Mouvement de trois Corps de figure quelconque, dont les particules s'attireroient en raiſon inverſe du quarré de leurs diſtances.

Mon but, dans ce Mémoire, eſt de montrer par un exemple que le Problême que je traite ici, & tous les autres de cette eſpece, quoiqu'ils paroiſſent infiniment plus compliqués, ne renferment pourtant point de difficultés d'un ordre ſupérieur à celles du Problême des trois Corps.

Soit ici, 1°. trois corps C, C', C'':

2°. dm, dm', dm'' des élémens quelconques de ces corps:

3°. $x, y, z ; x', y', z' ; x'', y'', z''$; des coordonnées rectangles qui donnent la poſition d'un élément quelconque dm, dm', dm'' à chaque inſtant.

4°. Soit pour abréger les diſtances entre dm & dm' & dm'',

$$f = \sqrt{x - x'^2 + y - y'^2 + z - z'^2} :$$

$$f' = \sqrt{x - x''^2 + y - y''^2 + z - z''^2} :$$

Digitized by Google

& la distance entre dm' & dm'',

$$f_{,} = \sqrt{x' - x''^{2} + y' - y''^{2} + z' - z''^{2}}.$$

5°. s, s', s'', les espaces parcourus par les points dm, dm', dm'' pendant l'élément du tems dt, que je suppose constant.

6°. Soit enfin u, u', u'', les vîtesses de ces mêmes points pendant le même tems.

Il est clair, 1°. que les forces de tout le corps C' agissantes sur le point dm, seront $\Sigma \frac{dm'}{f^2}$: le signe d'intégration Σ ne se rapportant qu'à la position des différens dm, dm', dm'' dans les corps, & non à leur position instantanée dans l'espace.

2°. Que par la même raison, les forces que le corps C'' exercera sur le même élément, les forces que les corps C & C'' exerceront sur dm', les forces que les corps C & C' exerceront sur dm'', seront $\Sigma \frac{dm''}{f'^2}$, $\Sigma \frac{dm}{f^2}$, $\Sigma \frac{dm''}{f_{,}^2}$, $\Sigma \frac{dm}{f'^2}$, $\Sigma \frac{dm'}{f_{,}^2}$.

Les forces que les corps C & C' exercent réciproquement l'un sur l'autre & par lesquelles ils tendent à s'approcher, seront par conséquent $\sum dm \, \Sigma \frac{dm'}{f^2}$; les mêmes forces entre les corps C & C'' seront de même $\sum dm \, \Sigma \frac{dm''}{f'^2}$; & les mêmes forces entre les corps C' & C'' seront $\sum dm' \, \Sigma \frac{dm''}{f_{,}^2}$.

Désignant par la caractéristique d des différences de x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; s, s', s'', &c. indépendantes de

de celles qui ſont affectées de la caractériſtique ordinaire d, l'expreſſion de la quantité d'action dans tout le ſyſtême pendant le tems dt ſera également

$$\int \Sigma\, dmu\,dds + dm'u'\,dds' + dm''u''\,dds'' \;\&c$$

$$\int \Sigma\, dm\,\Sigma \frac{dm'}{f^2}\,df + dm\,\Sigma\frac{dm''}{f'^2}\,df' + dm'\,\Sigma\frac{dm''}{f_{,}^2}\,df''.dt.$$

Ces deux expreſſions doivent être égales à chaque inſtant. Donc les égalant enſemble, & intégrant par rapport à la caractériſtique $\int$ ce qui peut être intégré immédiatement, ce qui reſtera ſous le ſigne devra être nul à chaque inſtant, & on doit avoir entre les coordonnées des équations qui le rendent tel.

Ces opérations exécutées, j'aurai l'expreſſion

$$\int \Sigma\, dm\frac{dd\,x}{dt} + dm\,\Sigma\frac{dm'}{f^2}\frac{x-x'}{f}dt + dm\,\Sigma\frac{dm''}{f'^2}\frac{x-x''}{f'}dt \cdot dx$$

$$+ dm\frac{dd\,y}{dt} + dm\,\Sigma\frac{dm'}{f^2}\frac{y-y'}{f}dt + dm\,\Sigma\frac{dm''}{f'^2}\frac{y-y''}{f'}dt \cdot dy$$

$$+ dm\frac{dd\,z}{dt} + dm\,\Sigma\frac{dm'}{f^2}\frac{z-z'}{f}dt + dm\,\Sigma\frac{dm''}{f'^2}\frac{z-z''}{f'}dt \cdot dz$$

$$+ dm'\frac{dd\,x'}{dt} - dm'\,\Sigma\frac{dm}{f^2}\frac{x-x'}{f}dt + dm'\,\Sigma\frac{dm''}{f_{,}^2}\frac{x'-x''}{f_{,}}dt \cdot dx'$$

$$+ dm'\frac{dd\,y'}{dt} - dm'\,\Sigma\frac{dm}{f^2}\frac{y-y'}{f}dt + dm'\,\Sigma\frac{dm''}{f_{,}^2}\frac{y'-y''}{f_{,}}dt \cdot dy'$$

$$+ dm'\frac{dd\,z'}{dt} - dm'\,\Sigma\frac{dm}{f^2}\frac{z-z'}{f}dt + dm'\,\Sigma\frac{dm''}{f_{,}^2}\frac{z'-z''}{f_{,}}dt \cdot dz'$$

$$+ dm''\frac{dd\,x''}{dt} - dm''\,\Sigma\frac{dm}{f'^2}\frac{x-x''}{f'}dt - dm''\,\Sigma\frac{dm'}{f_{,}^2}\frac{x'-x''}{f_{,}}dt \cdot dx''$$

$$+ dm''\frac{dd\,y''}{dt} - dm''\,\Sigma\frac{dm}{f'^2}\frac{y-y''}{f'}dt - dm''\,\Sigma\frac{dm'}{f_{,}^2}\frac{y'-y''}{f_{,}}dt \cdot dy''$$

$$+ dm''\frac{dd\,z''}{dt} - dm''\,\Sigma\frac{dm}{f'^2}\frac{z-z''}{f'}dt - dm''\,\Sigma\frac{dm'}{f_{,}^2}\frac{z'-z''}{f_{,}}dt \cdot dz''$$

$$= 0.$$

Digitized by Google

& cette expreſſion devra être nulle, quelles que ſoient les différentielles affectées de la caractériſtique d : je pourrois donc égaler à zero le coefficient de chacune de ces différences, ce qui me donneroit neuf équations. Mais il eſt aiſé de voir que pour réſoudre le Problême plus commodément, il eſt à propos d'avoir le mouvement d'un point déterminé auquel on rapporte enſuite le mouvement de tous les autres. Nous ferons donc pour y parvenir les opérations ſuivantes.

Je prends d'abord dans chaque corps un point déterminé dont je ſuppoſe que le mouvement ſoit rapporté à des coordonnées x, y, z; x′, y′, z′; x″, y″, z″; & que le mouvement d'un point quelconque de chacun de ces corps ſoit rapporté à des coordonnées P, Q, R; P', Q', R'; P'', Q'', R''; le point déterminé pris dans chaque corps étant ſuppoſé fixe, & ces coordonnées priſes dans la même direction que celles qui expriment le mouvement du point déterminé.

Cette ſuppoſition me donne $dx = dx + dP$, $dy = dy + dQ$, $dz = dz + dR$, & $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x + \mathrm{d}P$; $\mathrm{d}y = \mathrm{d}y + \mathrm{d}Q$, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}z + \mathrm{d}R$, $dx' = dx' + dP'$, $dy' = dy + dQ$, $dz' = dz + dR$, & $\mathrm{d}x' = \mathrm{d}x' + \mathrm{d}P'$, $\mathrm{d}y' = \mathrm{d}y' + \mathrm{d}Q'$, $\mathrm{d}z' = \mathrm{d}z' + \mathrm{d}R'$; enfin $dx'' = dx'' + dP''$, $dy'' = \mathrm{d}y'' + dQ''$, $dz'' = dz'' + dR''$, & $\mathrm{d}x'' = \mathrm{d}x'' + \mathrm{d}P''$, $\mathrm{d}y'' = \mathrm{d}y'' + \mathrm{d}Q''$, $\mathrm{d}z'' = dz'' + \mathrm{d}R''$.

Je ſuppoſe enſuite que par le point déterminé que j'ai pris dans chaque corps paſſent trois axes perpendiculaires entr'eux & qui aient la même direction que les coordonnées, qu'un point quelconque tourne autour de ces trois

Digitized by Google

axes, & que dans le corps C il parcourre autour de l'axe parallele aux x l'arc dx pendant le tems dt, autour de l'axe parallele aux y l'arc dy, & autour de l'axe parallele aux z l'arc dz ; dans le corps C' l'arc dx' autour de l'axe des x', l'arc dy' autour de l'axe des y', l'arc dz' autour de l'axe des z' ; dans le corps C'' enfin l'arc dx'' autour de l'axe des x'', l'arc dy'' autour de l'axe des y'', l'arc dz'' autour de l'axe des z''. Les angles ſont indépendans de la poſition d'un point quelconque dans le corps, & leur rapport donnera par conſéquent le mouvement giratoire de chacun des corps autour de ces axes. Cette nouvelle ſuppoſition me donne, en exprimant les différences de P, Q, R, &c. par leurs valeurs en x, y, z, &c.

$$dx = dx + R\,dy + Q\,dz, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}y + Q\,\mathrm{d}z,$$
$$dy = dy + R\,dx - P\,dz, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}x - P\,\mathrm{d}z,$$
$$dz = dz - Q\,dx - P\,dy, \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}z - Q\,\mathrm{d}x - P\,\mathrm{d}z,$$
$$dx' = dx' + R'dy' + Q'dz', \quad \mathrm{d}x' = \mathrm{d}x' + R'\mathrm{d}y' + Q'\mathrm{d}z',$$
$$dy' = dy' + R'dx' - P'dz', \quad \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y' + R'\mathrm{d}x' - P'\mathrm{d}z',$$
$$dz' = dz' - Q'dx' - P'dy', \quad \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z' - Q'\mathrm{d}x' - P'\mathrm{d}y',$$
$$dx'' = dx'' + R''dy'' + Q''dz'', \quad \mathrm{d}x'' = \mathrm{d}x'' + R''\mathrm{d}y'' + Q''\mathrm{d}z'',$$
$$dy'' = dy'' + R''dx'' - P''dz'', \quad \mathrm{d}y'' = \mathrm{d}y'' + R''\mathrm{d}x'' - P''\mathrm{d}z'',$$
$$dz'' = dz'' - Q''dx'' - P''dy'', \quad \mathrm{d}z'' = \mathrm{d}z'' - Q''\mathrm{d}x'' - P''\mathrm{d}y''.$$

Subſtituant ces valeurs dans l'équation ci-deſſus, & réduiſant en obſervant que le ſigne Σ n'affecte en aucune façon les x, x, &c., & égalant à zero le coefficient de chaque différence affectée de la caractériſtique d, j'aurai les dix-huit équations ſuivantes, où M, M', M'', déſignent les maſſes des corps C, C', C''.

Digitized by Google

$$1^{e}.\ M\,ddx+\Sigma P\,dm-\overline{dy^{2}+dz^{2}}+\Sigma Q\,dm\cdot\overline{ddz-dx\,dy}$$
$$+\Sigma R\,dm\cdot\overline{ddy+dx\,dz}+\sum dm\,\Sigma\frac{dm'}{f^{2}}\cdot\frac{x-x'+P-P'}{f}\,dt^{2}$$
$$+\sum dm\,\Sigma\frac{dm''}{f'^{2}}\cdot\frac{x-x''+P-P''}{f'}\,dt^{2}=0.$$

$$2^{e}.\ M\,ddy+\Sigma P\,dm-\overline{ddz+dx\,dy}+\Sigma Q\,dm-\overline{dx^{2}+dz^{2}}$$
$$+\Sigma R\,dm\cdot\overline{ddx-dy\,dz}+\sum dm\,\Sigma\frac{dm'}{f^{2}}\cdot\frac{y-y'+Q-Q'}{f}\,dt^{2}$$
$$+\sum dm\,\Sigma\frac{dm''}{f'^{2}}\cdot\frac{y-y''+Q-Q''}{f'}\,dt^{2}=0.$$

$$3^{e}.\ M\,ddz+\Sigma P\,dm-\overline{ddy-dx\,dz}+\Sigma Q\,dm$$
$$-\overline{ddx+dy\,dz}+\Sigma R\,dm-\overline{dx^{2}+dy^{2}}+\sum dm\,\Sigma\frac{dm'}{f^{2}}$$
$$\cdot\frac{z-z'+R-R'}{f}\,dt^{2}+\sum dm\,\Sigma\frac{dm''}{f'^{2}}\cdot\frac{z-z''+R-R''}{f'}\,dt^{2}=0.$$

$$4^{e}.\ M'\,ddx'+\Sigma P'\,dm'-\overline{dy'^{2}+dz'^{2}}+\Sigma Q'\,dm'$$
$$\cdot\overline{ddz'-dx'\,dy'}+\Sigma R'\,dm'\cdot\overline{ddy'+dx'\,dz'}-\sum dm'\,\Sigma\frac{dm}{f^{2}}$$
$$\cdot\frac{x-x'+P-P'}{f}\,dt^{2}+\sum dm'\,\Sigma\frac{dm''}{f_{1}^{2}}\cdot\frac{x'-x''+P'-P''}{f_{1}}\,dt^{2}=0.$$

$$5^{e}.\ M'\,ddy'+\Sigma P'\,dm'-\overline{ddz'+dx'\,dy'}+\Sigma Q'\,dm'$$
$$-\overline{dx^{2}+dz^{2}}+\Sigma R'\,dm'\cdot\overline{ddx'-dy'\,dz'}-\sum dm'\,\Sigma\frac{dm}{f^{2}}$$
$$\cdot\frac{y-y'+Q-Q'}{f}\,dt^{2}+\sum dm'\,\Sigma\frac{dm''}{f_{1}^{2}}\cdot\frac{y'-y''+Q'-Q''}{f_{1}}\,dt^{2}=0.$$

$$6^{e}.\ M'\,ddz'+\Sigma P'\,dm'-\overline{ddy'-dx'\,dz'}+\Sigma Q'\,dm'$$
$$-\overline{ddx'+dy'\,dz'}+\Sigma R'\,dm'-\overline{dx'^{2}+dy'^{2}}-\sum dm'\,\Sigma\frac{dm}{f^{2}}$$
$$\cdot\frac{z-z'+R-R'}{f}\,dt+\sum dm'\,\Sigma\frac{dm'}{f_{1}^{2}}\cdot\frac{z'-z''+R'-R''}{f_{1}}\,dt^{2}=0.$$

Digitized by Google

$7^e.\ M''ddx'' + \Sigma P''dm'' - \overline{dY''^2 + dY''^2} + \Sigma Q''dm''$
$\cdot \overline{ddz'' - dX''dY''} + \Sigma R''dm'' \cdot \overline{ddY'' + dX''dz''} - \sum dm''$
$\Sigma \frac{dm}{f'^2} \cdot \frac{x - x'' + P' - P''}{f'} dt^2 - \sum dm'' \Sigma \frac{dm'}{f_,^2} \cdot \frac{x' - x'' + P' - P''}{f_,} dt^2$
$= 0.$

$8^e.\ M''ddY'' + \Sigma P''dm'' - \overline{ddz'' + dX''dY''} + \Sigma Q''dm''$
$- \overline{dX''^2 + dY''^2} + \Sigma R''dm'' - \overline{dX'' - dY''dz''} - \sum dm''$
$\Sigma \frac{dm}{f'^2} \cdot \frac{Y - Y'' + Q - Q''}{f'} dt^2 - \sum dm'' \Sigma \frac{dm'}{f_,^2} \cdot \frac{Y' - Y'' + Q' - Q''}{f_,} dt^2$
$= 0.$

$9^e.\ M''ddz'' + \Sigma P'dm'' - \overline{ddY'' - dX''dz''} + \Sigma Q''dm''$
$- \overline{ddX'' + dY''dz''} + \Sigma R''dm'' - \overline{dX''^2 + dY''^2} - \sum dm''$
$\Sigma \frac{dm}{f'^2} \cdot \frac{z - z'' + R - R''}{f'} dt^2 - \sum dm'' \Sigma \frac{dm'}{f_,^2} \cdot \frac{z' - z'' + R' - R''}{f_,} dt^2$
$= 0.$

$10^e.\ \Sigma Rdm.ddY + \Sigma PRdm - \overline{ddz + dXdY} + \Sigma QRdm$
$- \overline{dX^2 + dz^2} + \Sigma R^2 dm \cdot \overline{ddX - dYdz} + \sum Rdm \Sigma \frac{dm'}{f^2}$
$\cdot \frac{Y - Y' + Q - Q'}{f} dt^2 + \sum Rdm \Sigma \frac{dm''}{f'^2} \cdot \frac{Y - Y'' + Q - Q''}{f} dt^2$
$- \Sigma Qdm.ddz - \Sigma PQdm - \overline{ddY - dXdz} - \Sigma Q^2 dm$
$- \overline{ddX + dYdz} - \Sigma QRdm - \overline{dX^2 + dY^2} - \sum Qdm$
$\Sigma \frac{dm'}{f^2} \cdot \frac{z - z' + R - R'}{f} dt^2 - \sum Qdm \Sigma \frac{dm''}{f'^2} \cdot \frac{z - z'' + R - R''}{f} dt^2$
$= 0.$

$11^e.\ \Sigma Rdm \cdot ddx + \Sigma PRdm - \overline{dX^2 + dz^2} + \Sigma QRdm$
$\cdot \overline{ddz - dXdY} + \Sigma R^2 dm \cdot \overline{ddY + dXdz} + \sum Rdm$
$\Sigma \frac{dm'}{f^2} \cdot \frac{x - x' + P - P'}{f} dt^2 + \sum Rdm \Sigma \frac{dm''}{f'^2} \cdot \frac{x - x'' + P + P''}{f'} dt^2.$

. . . . . .

$$-\Sigma P dm \cdot ddz - \Sigma P^2 dm - \overline{ddY - dXdz} - \Sigma PQdm$$
$$-\overline{ddX + dYdz} - \Sigma PR\,dm - \overline{dX^2 + dY^2} - \sum P dm$$
$$\Sigma \frac{dm'}{f^2} \cdot \frac{z - z' + R - R'}{f} dt^2 - \sum P dm \Sigma \frac{dm''}{f''^2} \cdot \frac{z - z'' + R - R''}{f'} dt^2$$
$$= 0.$$

12e. $\Sigma Q dm \cdot ddx + \Sigma PQdm \cdot -\overline{dY^2 + dz^2} + \Sigma Q^2 dm$
$$\cdot \overline{ddz - dXdY} + \Sigma Q R\,dm \cdot \overline{ddY + dXdz} + \sum Q\,dm$$
$$\Sigma \frac{dm'}{f^2} \cdot \frac{x - x' + P - P'}{f'} dt^2 + \sum Q dm \Sigma \frac{dm''}{f''^2} \cdot \frac{x - x'' + P - P'}{f'} dt^2.$$

$$-\Sigma P dm \cdot ddY - \Sigma P^2 dm - \overline{ddz + dXdY} - \Sigma PQdm$$
$$-\overline{dX^2 + dz^2} - \Sigma PR\,\overline{ddx - dYdz} - \sum P dm \Sigma \frac{dm'}{f^2}$$
$$\cdot \frac{Y - Y' + Q - Q'}{f} dt^2 - \sum P dm \Sigma \frac{dm''}{f''^2} \cdot \frac{Y - Y'' + Q - Q''}{f'} dt^2$$
$$= 0.$$

13e. $\Sigma R' dm' \cdot ddY' + \Sigma P' R' dm' - \overline{ddz' + dX'dY'}$
$$+\Sigma Q' R' dm' - \overline{dX'^2 + dz'^2} + \Sigma R'^2 dm' \overline{ddx' - dY'dz'}$$
$$-\sum R' dm' \Sigma \frac{dm'}{f^2} \cdot \frac{Y - Y' + Q - Q'}{f} dt^2 + \sum R' dm' \Sigma \frac{dm''}{f''^2}$$
$$\cdot \frac{Y' - Y'' + Q' - Q''}{f'} dt^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$-\Sigma Q' dm'\, ddz' - \Sigma P' Q' dm' - \overline{ddY' - dX'dz'}$$
$$-\Sigma Q'^2 dm' - \overline{ddx' + dY'dz'} - \Sigma Q' R' dm' - \overline{dx'^2 + dY'^2}$$
$$+\sum Q' dm' \Sigma \frac{dm}{f^2} \cdot \frac{z - z' + R - R'}{f} dt^2 - \sum Q' dm' \Sigma \frac{dm''}{f''^2}$$
$$\cdot \frac{z' - z'' + R' - R''}{f'} dt^2 = 0.$$

14e. $\Sigma R' dm' \cdot ddx' + \Sigma P' R' dm' - \overline{dY'^2 + dz'^2}$
$$+\Sigma Q' R' dm' \cdot \overline{ddz' - dX'dY'} + \Sigma R'^2 dm' \cdot \overline{ddY' + dX'dz'}$$
$$-\sum R' dm' \Sigma \frac{dm}{f^2} \cdot \frac{x - x' + P - P'}{f} dt^2 + \sum R' dm' \Sigma \frac{dm''}{f''^2}$$
$$\cdot \frac{x' - x'' + P' - P''}{f'} dt^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Digitized by Google

$$-\Sigma P'dm' \cdot ddz' - \Sigma P'^2 dm' - \overline{ddY' - dX'dz'} - \Sigma P'Q'dm'$$
$$- \overline{ddX' + dY'dz'} - \Sigma P'R'dm' - \overline{dX'^2 + dY'^2} + \sum P'dm'$$
$$\Sigma \frac{dm}{f^2} \cdot \frac{z - z' + R - R'}{f} dt^2 - \sum P'dm' \Sigma \frac{dm''}{f_,^2} \cdot \frac{z' - z'' + R' - R''}{f_,} dt^2$$
$$= 0.$$

15°. $\Sigma Q'dm' \cdot ddx' + \Sigma P'Q'dm' - \overline{dY'^2 + dz'^2} + \Sigma Q'^2 dm'$
$$\cdot \overline{ddz' - dx'dY'} + \Sigma Q'R'dm' \cdot \overline{ddY' + dx'dz'} - \sum Q'dm'$$
$$\Sigma \frac{dm}{f^2} \cdot \frac{x - x' + P - P'}{f} dt^2 + \sum Q'dm' \Sigma \frac{dm''}{f_,^2} \cdot \frac{x' - x'' + P' - P''}{f_,} dt^2.$$

$$-\Sigma P'dm' \cdot ddY' - \Sigma P'^2 dm' - \overline{ddz' + dx'dY'} - \Sigma P'Q'dm'$$
$$- \overline{dx'^2 + dz'^2} - \Sigma P'R'dm' \cdot \overline{ddx' - dY'dz'} + \sum P'dm'$$
$$\Sigma \frac{dm}{f^2} \cdot \frac{Y - Y' + Q - Q'}{f} dt^2 - \sum P'dm' \Sigma \frac{dm''}{f_,^2} \cdot \frac{Y' - Y'' + Q' - Q''}{f_,} dt^2$$
$$= 0.$$

16°. $\Sigma R''dm'' \cdot ddY'' + \Sigma P''R''dm'' - \overline{ddz'' + dx''dz''}$
$$+ \Sigma Q''R''dm'' - \overline{dx''^2 + dz''^2} + \Sigma R''^2 dm'' \overline{ddx'' - dY''dz''}$$
$$- \sum R''dm'' \Sigma \frac{dm}{f'^2} \cdot \frac{Y - Y'' + Q - Q''}{f'} dt^2 - \sum R''dm''$$
$$\Sigma \frac{dm'}{f''^2} \cdot \frac{Y' - Y'' + Q' - Q''}{f_,} dt^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$-\Sigma Q''dm'' \cdot ddz'' - \Sigma P''Q''dm'' - \overline{ddY'' - dx''dz''}$$
$$- \Sigma Q''^2 dm'' - \overline{ddx'' + dY''dz''} - \Sigma Q''R''dm'' - \overline{dx''^2 + dY''^2}$$
$$+ \sum Q''dm'' \Sigma \frac{dm}{f'^2} \cdot \frac{z - z'' + R - R''}{f'} dt^2 - \sum Q''dm'' \Sigma \frac{dm'}{f_,^2}$$
$$\frac{z' - z'' + R' - R''}{f_,} dt^2 = 0.$$

17°. $\Sigma R''dm'' \cdot ddx'' + \Sigma P''R''dm'' - \overline{dY''^2 + dz''^2}$
$$+ \Sigma Q''R''dm'' \cdot \overline{ddz'' - dx''dY''} + \Sigma R''^2 dm'' \cdot \overline{ddY'' + dx''dz''}$$
$$- \sum R''dm'' \Sigma \frac{dm}{f'^2} \cdot \frac{x - x'' + P - P''}{f'} dt^2 - \sum R''dm'' \Sigma \frac{dm'}{f_,^2}$$
$$\cdot \frac{x' - x'' + P' - P''}{f_,} dt^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Digitized by Google

$$-\Sigma P''dm''\cdot ddz'' - \Sigma P''^2 dm'' \overline{ddy''dz'' - dx''dz''} - \Sigma P''Q''dm'' \overline{ddx''dy'' + dy''dz''} - \Sigma P''R''dm'' \overline{dx''^2 + dy''^2} + \Sigma P''dm'' \Sigma \frac{dm}{f''^2}\cdot\frac{z-y''+R-R''}{f'}dt^2 + \Sigma P''dm'' \Sigma \frac{dm'}{f_{,}^2}\cdot\frac{z'-z''+R'-R''}{f_{,}}dt^2 = 0.$$

$$18^{e}.\ \Sigma Q''dm''\cdot ddx'' + \Sigma P''Q''dm'' \overline{dy''^2 + dz''^2} + \Sigma Q''^2 dm''\cdot \overline{ddz'' - dx''dy''} + \Sigma Q''R''dm''\cdot \overline{ddy'' + dx''dz''} - \Sigma Q''dm'' \Sigma \frac{dm}{f''^2}\cdot\frac{x-x''+P-P''}{f'}dt^2 - \Sigma Q''dm'' \Sigma \frac{dm'}{f_{,}^2}\cdot\frac{x'-x''+P'-P''}{f_{,}}dt^2.$$

$$-\Sigma P''dm''\cdot ddy'' - \Sigma P''^2 dm'' \overline{ddz'' - dx''dy''} - \Sigma P''Q''dm'' \overline{dx''^2 + dy''^2} - \Sigma P''R''dm''\cdot \overline{ddx'' - dy''dz''} + \Sigma P''dm'' \Sigma \frac{dm}{f''^2}\cdot\frac{y-y''+Q-Q''}{f'}dt^2 - \Sigma P''dm'' \Sigma \frac{dm'}{f_{,}^2}\cdot\frac{y'-y''+Q'-Q''}{f_{,}}dt^2 = 0.$$

Je ſuppoſe que le point du corps dont on cherche le mouvement, ſoit ce point ſingulier qu'on nomme centre de gravité, & dont la propriété eſt telle qu'on a continuellement $\int P\,dm = 0$, $\int Q\,dm = 0$, $\int R\,dm = 0$ dans le corps C. $\int P'\,dm' = 0$, $\int Q'\,dm' = 0$, $\int R'\,dm' = 0$ pour le corps C'. $\int P''\,dm'' = 0$, $\int Q''\,dm'' = 0$, $\int R''\,dm'' = 0$ pour le corps C''. Cette ſuppoſition produira les deux avantages de ſimplifier beaucoup les équations ci-deſſus en en diminuant le nombre des termes, & de faire diſparoître des neuf premieres équations les différences ſecondes & premieres des variables x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; & des neuf dernieres les ſecondes différences des variables x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; ce qui ſimplifie encore & détermine

détermine les neuf premieres à donner le mouvement du centre de gravité, comme les neuf dernieres à donner le mouvement giratoire des corps; mais non pas toujours indépendamment les unes des autres.

Dans ces équations nous avons, indépendamment des fonctions qui naiſſent des forces, les formules $\Sigma P^2 dm$, $\Sigma PQdm$, $\Sigma PRdm$, $\Sigma Q^2 dm$, $\Sigma QRdm$, $\Sigma R^2 dm$ qui ſe rapportent au corps C, & ſix formules ſemblables pour chacun des corps C' & C'': pour intégrer ces formules, je ſuppoſe que la poſition d'un point quelconque dans le corps C ſoit donnée par trois coordonnées rectangles p, q, r, en ſorte que la diſtance de ce point au centre de gravité ſoit $\sqrt{p^2+q^2+r^2} = \sqrt{P^2+Q^2+R^2}$, & qu'au commencement du mouvement $P=p$, $Q=q$, $R=r$; il eſt clair que ſi je fais parcourir ſucceſſivement à la ligne tirée du centre de gravité au point quelconque les angles X, Y, Z, elle ſe trouvera dans la même poſition qu'elle ſe trouve dans le Problême au bout du tems t. Donc les valeurs de P, Q, R, que la Géométrie ordinaire donne, dans cette hypotheſe en p, q, r & ſinus & coſinus de X, Y, Z, ſeront les mêmes que celles que doit donner le Problême après le tems t. Je ſubſtituerai donc ces valeurs dans les formules précédentes; j'intégrerai enſuite par rapport aux ſignes Σ, c'eſt-à-dire en ne regardant comme variables que les p, q, r; il en ſera de même pour chacun des autres corps; & toutes les fois que ces corps ſeront tels que l'élément dm puiſſe être exprimé par une formule algébrique, ſoit qu'ils ſoient homogenes, ſoit que leur denſité varie ſuivant une certaine loi, on aura

Digitized by Google

les intégrales par les méthodes connues pour les quadratures. Quant aux intégrales qui naiſſent des forces, on les aura par une double opération, ne regardant dans chacune comme variable que les coordonnées du corps dont l'élément ſe trouve ſans le ſigne.

Toutes ces opérations exécutées, j'aurai entre les variables des équations algébriques : car puiſque les angles x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'', ne ſe trouvent pas dans ces équations, mais ſeulement leurs différences, on peut les en faire aiſément diſparoître, pour n'y plus laiſſer que leurs ſinus ou coſinus & leurs différences.

Les équations entre les variables ſeront telles qu'il n'y en a aucune qui ne contienne les dix-neuf variables du Problême; le tems, dont la différence dt^2 ſe trouve dans chaque équation, ſera éliminé en égalant les valeurs de dt^2 priſes de deux de ces équations, & on parviendra par des différentiations réitérées à des équations qui ne contiendront plus que deux variables & auront lieu entre deux coordonnées. Ces équations ſeront celles qu'on aura à intégrer pour réſoudre le Problême, & ſur leſquelles on peut faire les réflexions ſuivantes.

1°. Le mouvement du centre de gravité, & le mouvement giratoire de chacun des corps, ſera donné par dix-huit équations, dont neuf entre le tems & chacune des neuf coordonnées du mouvement des centres de gravité, & neuf entre le tems & les ſinus & coſinus des angles du mouvement giratoire. Les neuf premieres ſeront toutes ſemblables entr'elles de même que les neuf dernieres, & il en ſera de même des équations différentielles qui en pourroient naître.

Digitized by Google

2°. Le mouvement ſera également donné par une équation entre t & une variable quelconque, puis deux équations entre les coordonnées x, y, z; deux entre les coordonnées x', y', z'; deux entre les coordonnées x'', y'', z''; deux entre les ſin. & coſ. de X, Y, Z; deux entre les ſin. & coſ. de X', Y', Z'; deux entre les ſin. & coſ. de X'', Y'', Z''; deux entre x & x' ou y & y' ou z & z', & x & x'' ou y & y'' ou z & z''; deux entre les ſin. & coſ. de X & X' ou de Y & Y' ou de Z & Z', & les ſin. & coſ. de X & X'' ou Y & Y'' ou Z & Z''; une enfin entre x & les ſin. ou coſ. de X, &c. Les équations que je propoſe ici ſous la particule disjonctive doivent être ſemblables entr'elles, c'eſt-à-dire qu'elles ne doivent différer que par les différentes variables qui y entrent, & non par la forme. Les équations en x, y & x, z ſeront ſemblables aux équations en x', y' & x', z', & aux équations entre x', y'' & x'', z''. L'équation en x & y ſera ſemblablement compoſée de x & de y; celle en x & z ſera ſemblablement compoſée de x & de z. Les fonctions de y dans la premiere ſeront ſemblables aux fonctions de z dans la ſeconde, & on aura une autre équation auſſi ſemblable entre y & z; d'où il eſt aiſé de conclure qu'on doit avoir une fonction de x égale à une ſemblable fonction de y, & la même fonction de x égale à une fonction ſemblable de z. Il en ſera de même des équations entre x' & y', x' & z'; & x'' & y'', x'' & z''; & dans toutes les équations ſemblables entre elles, les coefficiens ſeront toujours pour le mouvement de chaque corps des fonctions ſemblables de quantités

Digitized by Google

dépendantes des corps C, C', C''. On doit dire des six équations entre sin. & cos. de x & y, sin. & cos. de x & z, sin. & cos. de x' & y', sin. & cos. de x' & z', sin. & cos. de x'' & y'', sin. & cos. de x'' & z'', la même chose que des six équations précédentes. Les équations entre x & x', x & x'' seront semblables, composées de fonctions semblables de chacune des variables, & les coefficiens aussi composés de fonctions semblables dépendantes de C & de C', ou de C & de C''. Il en sera de même des équations entre sin. & cos. de x & de x', & sin. & cos. de x & de x''.

3°. Les quantités constantes à déterminer dans le Problême, qui, ne se pouvant trouver dans les équations différentielles, sont les mêmes par conséquent que celles que les différentiations ont pu éliminer, & les mêmes par conséquent que les arbitraires des équations intégrales, sont les valeurs des neuf coordonnées du mouvement des centres de gravité, au commencement du mouvement, les valeurs correspondantes des neuf sin. & cos. du mouvement giratoire, les vîtesses de chacun des centres de gravité, & leurs directions, dans ce moment, pour lesquelles il suffit d'avoir les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$; $\frac{dx''}{dt}$, $\frac{dy''}{dt}$, $\frac{dz''}{dt}$; les vîtesses enfin du mouvement giratoire & leurs directions données par de semblables formules. Les arbitraires seront en tout au nombre de trente-six; dix-huit se rapporteront au mouvement du centre de gravité, se trouveront semblablement placées dans les neuf équations semblables entre t & chacune des coordonnées qui donnent ce mouvement, la premiere différen-

Digitized by Google

tiation aura fait disparoître les neuf premieres, & la seconde les neuf dernieres. Les dix-huit autres se rapporteront au mouvement giratoire, & seront produites & distribuées d'une maniere semblable.

De tout cela & de ce que les équations trouvées ne sont que du second ordre, il est aisé de voir que chaque équation séparée entre t & une des coordonnées quelconque ne peut contenir plus de fonctions transcendantes de cette coordonnée (quoiqu'elle en puisse contenir moins) que n'en peuvent faire évanouir deux différentiations successives, & ne peut avoir non plus que deux arbitraires. Les équations entre les coordonnées n'en pourront contenir que quatre, réductibles à trois par elles-mêmes. L'élimination étant faite, si on observe de faire entrer dans chaque opération les équations du Problême, & non pas seulement leurs différences, il sera toujours possible de parvenir à une équation qui aura pour intégrale une équation Algébrique du troisieme ordre sans arbitraires, ou même une du second. Donc les difficultés de ce Problême seront du même ordre que celles du Problême précédent, & on pourra y faire les mêmes remarques.

REMARQUE I.

La méthode sera la même pour un nombre de corps quelconque, & le Problême sans être d'un autre ordre, sera seulement plus compliqué. On peut dire la même chose de tout Problême où l'on cherchera le mouvement d'un système de corps quelconque où tout sera mutuel &

Digitized by Google

dont les équations différentielles ne ſeront que du ſecond ordre.

REMARQUE II.

Si j'ai entre un nombre n de variables un nombre $n-1$ d'équations différentielles, le nombre des fonctions tranſcendantes & des arbitraires ſera en tout la ſomme des expoſans de l'ordre de toutes ces équations; les fonctions étant priſes comme je l'explique dans la IIe Section de la premiere Partie du Calcul Intégral. Quant à la maniere dont elles ſeront diſtribuées dans les équations ſéparées, on la trouvera *à poſteriori* par la méthode expliquée dans le Mémoire précédent, lorſque la nature du Problême ne la donnera pas *à priori*.

REMARQUE III.

Les neuf premieres équations donneront ſeules indépendamment des autres le mouvement des centres de gravité, lorſque les fonctions qui s'y trouvent contenir les ſinus & coſinus du mouvement giratoire ſeront nulles, ou que les égalant à une fonction dépendante ſeulement de la figure des corps & indépendante du mouvement du centre de gravité, on aura une équation qui convienne avec celles du Problême. Les neuf dernieres dans des ſuppoſitions ſemblables, donneront auſſi le mouvement giratoire indépendamment des neuf premieres.

Digitized by Google

REMARQUE IV.

Si les intégrations que je ſuppoſe être faites par rapport aux ſignes Σ, introduiſoient dans les propoſées des fonctions tranſcendantes, les réflexions ci-deſſus auroient également lieu, puiſque ces tranſcendantes ſeroient connues. Si au lieu de ſuppoſer ces intégrations, on fait évanouir les ſignes Σ par des différentiations qui n'affectent que les p, q, r, dm, Σdm, on aura des équations encore du même ordre, par rapport aux variables du mouvement: on les auroit par la même méthode, en regardant comme conſtantes les quantités qui ne dépendent que de la figure; & en intégrant enſuite, en regardant ces quantités comme les ſeules variables, on aura réſolu ce problême. La méthode eſt la même pour toutes les équations qui contiennent des variables, abſolument indépendantes les unes des autres. On aura auſſi par-là la figure des corps, leur mouvement étant donné, comme on avoit eu ci-deſſus le mouvement, la figure étant donnée.

Digitized by Google

TROISIEME

Digitized by Google

TROISIEME MEMOIRE.

METHODE D'APPROXIMATION,

OU

APPLICATION DES SUITES INFINIES A L'INTÉGRATION.

LA Méthode d'intégrer que je me propoſe de donner ici, eſt fondée ſur les mêmes principes que celle que j'ai déja donnée. Je la crois plus commode, & auſſi générale dans la pratique, quoi qu'elle le ſoit infiniment moins à regarder les choſes d'une maniere abſtraite.

Si j'ai entre x & y une équation algébrique délivrée de dénominateurs & de radicaux, j'aurai y égale à une fonction de x, que je trouverai en réſolvant l'équation ordonnée par rapport à y; j'aurai donc autant de valeurs de y en x, que cette équation a de racines. Ces valeurs ſeront liées entr'elles, comme le ſont les racines des équations algébriques à une ſeule variable. Ces dernieres racines ſe pourront toujours trouver en général, quelque ſoit le dégré de l'équation, à l'aide des réflexions ſuivantes. 1°. Elles ſeront compoſées de nombres & de fonc-

Digitized by Google

tions entieres, dépendantes des coefficiens des puiſſances de y. 2°. Ces fonctions entieres ne pourront être affectées d'un ſigne radical plus élevé que l'expoſant du dégré de la propoſée : ces fonctions ainſi affectées, ne pourront être qu'en nombre inférieur à ce même expoſant. 3°. Ces mêmes fonctions entreront dans chaque racine & ſeront liées entr'elles, en ſorte qu'elles ſoient les racines d'une équation d'un ordre inférieur, dont l'expoſant ſoit égal à leur nombre. 4°. Les coefficiens en nombres qu'elles pourroient avoir pris dans une même racine, dépendront auſſi d'une équation de ce même ordre inférieur, pris dans les différentes racines de la propoſée : ils ſeront auſſi les différentes racines d'une équation d'un ordre inférieur d'une unité à celui de la propoſée. 5°. Multipliant toutes ces racines les unes par les autres pour produire la propoſée, il faut que les coefficiens numériques de chaque radical qui reſtera dans le coefficient de chaque puiſſance, ſoient égaux à zéro; & que les fonctions ſans radicaux qui reſteront dans les coefficiens de chacune de ces mêmes puiſſances, ſoient égales au coefficient de cette puiſſance dans la propoſée, ce qui donnera des équations pour les déterminer : ces coefficiens ſeront du nombre inférieur d'une unité à l'expoſant du dégré de la propoſée; & mettant dans chaque racine un terme rationel égal au coefficient du ſecond terme diviſé par l'expoſant, on aura l'équation cherchée pour ce ſecond terme : ainſi les fonctions affectées de radicaux devront contenir un nombre de fonctions rationelles moindre de deux unités, & conſéquemment égal à celui que contient la racine d'un dégré inférieur d'une unité.

Digitized by Google

6°. Enfin il ſera permis de ſuppoſer que le produit de toutes ces racines qui ſe trouvent ſous un ſigne radical & qui eſt néceſſairement rationel, ſoit une puiſſance parfaite de même degré que l'expoſant du radical. Il ſuit de tout cela, qu'il ſera facile de trouver immédiatement, pour un degré quelconque, un nombre fini de formes, entre leſquels on trouvera celle que doivent avoir les racines de l'Equation propoſée, en cherchant à la produire par la multiplication de ces racines. On trouveroit, par exemple, que $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, doit être le produit des racines $x + p + m\sqrt[3]{q + \sqrt{r}} + n\sqrt[3]{q - \sqrt{r}}$

$$x + p + m'\sqrt[3]{q + \sqrt{r}} + n'\sqrt[3]{q - \sqrt{r}}$$

$$x + p + m''\sqrt[3]{q + \sqrt{r}} + n''\sqrt[3]{q - \sqrt{r}}$$

& les racines d'une équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ſe trouveront devoir être de la forme $x + p + \sqrt{AX + BX' + CX''} + \sqrt{A'X + B'X' + C'X''}$

$$+ \sqrt{A''X^2 + B''XX' + C''XX'' + D''X'^2 + E''X'X'' + F''X''^2},$$

p étant une quantité entiere & rationelle, égale à, $\frac{1}{4}a$, X, X', X'' étant les trois racines d'une équation du troiſieme degré, & les autres caracteres étant des nombres. Le Problême général de réſoudre une Equation donnée, ſera réſolu généralement par cette Méthode, & n'aura plus d'autres difficultés, que celles d'un calcul toujours de plus en plus compliqué; Calcul auquel je ne m'arrêterai point,

Digitized by Google

d'autant que j'apprends que M. Bézout a donné sur cette matière, une Méthode qui lui est propre, mais dont je n'ai point eu connoissance jusqu'ici. Il est aisé de voir que ce que je viens de dire d'une Equation algébrique, à une ou à deux variables, est également vrai quelque soit le nombre de variables, & est réciproque pour chacune. Mais il n'en est pas de même des Equations non algébriques, & c'est ce qu'il faut que j'examine ici.

Je suppose que j'aie, par exemple, l. $x + x + b = 0$, b étant un nombre entier dans cet exemple, il est clair qu'il faut que x soit un nombre, que l. x en soit aussi un, & que le logarithme de ce nombre, plus le nombre lui-même, soit égal à b, ce qui assujettit le nombre entier b à certaines conditions. Je suppose pareillement que j'aie l'Equation intégrale,

$$\frac{\text{l. } dx + by + cp}{p} + \frac{dx + b'y + c'p}{p} + N = 0.$$

N étant une arbitraire, il est clair que je n'aurai la valeur de y en x, que si $\frac{d'}{b'} = \frac{d}{b}$; ce qui réduit la forme proposée à $ax + by + cp + N = 0$, ou bien si $b = 0$ ou $b' = 0$; & que si dans ce dernier cas, je veux avoir aussi la valeur de x en y, il faut ou que $a = 0$ & $b' = 0$, ou $a = 0$ & $b = 0$. Ces exemples suffisent pour faire voir comment dans des équations plus compliquées, il faut s'y prendre pour distinguer les cas où l'on peut avoir y en x ou x en y, ou tous deux à la fois. Les mêmes principes apprendront à distinguer de même les cas où l'on peut avoir une fonction de y, égale à une fonction de x, & s'appliqueront égale-

Digitized by Google

ment aux équations qui contiendroient un plus grand nombre de variables.

Si on vouloit trouver ces mêmes conditions pour une équation différentielle, dont l'intégrale eſt inconnue, on ſuppoſeroit, par exemple, que V eſt la différentielle exacte d'une fonction de x, plus une fonction de y d'un ordre quelconque. Une méthode ſemblable à celle du Problême ſecond, *Cal. intégral*, *pag.* 8, donneroit les équations de condition dans cette ſuppoſition; & elles ne différeroient de celles de ce Problême, qu'en ce qu'au lieu des différences entieres d, on auroit des différences particlles, répondant à x & à ſes différences, ou à y & à ſes différences. Par la méthode enſuite du Problême cinq, *pag.* 22, on trouvera une formule qui, étant débarraſſée du coefficient général, qui doit rendre la propoſée une différentielle complette, & des différentielles de x ou de y, ſupérieures à celle que contient $V = 0$, & cela à l'aide des différences partielles répondant à x ou y, ſera ou nulle par elle-même, ou aura lieu en même tems que $V = 0$, lorſque $V = 0$ pourra avoir une intégrale de cette forme. Il en ſera de même pour un nombre de variables quelconque, & pour tout autre ſuppoſition ſemblable.

Ces recherches auront une très grande utilité, en ce que dans la pratique, les équations, où ces indéterminées peuvent être ſéparées, ſont preſque les ſeules dont on puiſſe ſe ſervir; & en ce que, connoiſſant dans les formules d'intégrales, celles où cette ſéparation a ou n'a pas lieu, & le connoiſſant auſſi pour chaque différentielle propoſée, on

Digitized by Google

ne comparera à chaque équation différentielle, que les intégrales de la classe de celles qu'on saura par-là lui convenir.

Maintenant, si j'ai entre x & y une équation différentielle d'un ordre quelconque, en sorte que j'aie y égale à une fonction de x, il est aisé de voir, 1°. que cette fonction de x ne pourra contenir qu'un nombre égal à l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle de fonctions transcendantes de x, qui ne pourront entrer dans la composition les unes des autres, comme on le peut voir dans le Calcul intégral, page 37 & suivantes, & que j'appellerai de même r, s, t, &c. 2°. Que dans cette fonction les arbitraires, que la différentiation devra faire disparoître pour avoir la proposée, seront disposées selon les différentes formes que peuvent avoir r, s, t, &c., comme on l'explique au même endroit. 3°. Que désignant par n l'exposant de l'ordre de la proposée, faisant disparoître les dénominateurs & les radicaux, la fonction transcendante la plus composée ne pourra contenir de radicaux plus élevés que l'exposant de la puissance de $d^n y$; & que quant aux autres fonctions transcendantes, mettant dans l'équation proposée $x + g$ à la place de x, g étant une constante indéterminée, afin qu'on puisse supposer toujours $y = a + bx + cx^2 + dx^3$, &c., substituant, puis comparant terme à terme, il est clair que le nombre & le dégré de ces radicaux, comme de ceux de la fonction algébrique de x qui entre dans la valeur de y, seront assujettis à ne point donner plus de valeurs de y, qu'on n'en

Digitized by Google

trouve dans la comparaiſon ci deſſus pour chaque terme de la ſuite. Dans le Problême des quadratures ou ceux qui s'y réduiſent, c'eſt-à-dire, où y ne ſe trouve point dans l'équation du premier ordre y, ni dy dans celle du ſecond, &c, ces radicaux étant donnés, & l'intégrale n'en pouvant contenir d'autres, on a immédiatement la forme dont y eſt ſuſceptible; & il eſt clair que la valeur de l'ordonnée en l'abciſſe dépendante d'une équation d'un dégré quelconque, on aura, ſi la courbe eſt exactement quarrable, une équation du même dégré entre l'aire & la même abciſſe.

On voit que tout ce que je viens de dire eſt applicable, *mutatis*, *mutandis*, au cas où l'on a ſimplement une fonction de y égale à une fonction de x.

Tout ceci poſé & la forme de la ſuite déterminée en général, il n'y aura plus qu'à la ſubſtituer dans la propoſée, & en déterminer enſuite les coefficiens; mais avant de faire cette ſubſtitution, il faudroit avoir la forme générale des ſuites dont la ſomme eſt algébrique. Sans cela, la ſuite $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$ donnant en général la valeur de y, on n'auroit, en ſubſtituant, des ſuites plus compliquées, que des valeurs indéterminées pour les coefficiens. Je tirerai la méthode que je vais donner ici, pour avoir cette forme, d'un Mémoire que j'ai eu l'honneur de préſenter à l'Académie des Sciences, au mois d'Octobre 1761. On l'y propoſoit comme générale pour les quadratures, rectifications abſolues, & même pour l'intégration, toutes les fois qu'une variable étoit fonction algébrique d'une autre.

Digitized by Google

Je suppose que j'aie entre les variables, x & y l'équation algébrique du dégré m.

$$\begin{aligned}
&Ay^m \\
&+ \overline{A' + B'x} \cdot y^{m-1} \\
&+ \overline{A'' + B''x + C''x^2} \cdot y^{m-2} \\
&+ \overline{A''' + B'''x + C'''x^2 + D'''x^3} \cdot y^{m-3} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ A + Bx + \Gamma x^2 + \Delta x^3 \ldots + \Pi x^p = 0
\end{aligned}$$

Soit, $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + cx^4 \cdots + (n)x^n + (n+1)x^{n+1} \ldots$ une des racines de cette équation sous la forme d'une suite infinie, où je désigne pour plus de commodité le coefficient d'un terme x^n par (n). Il est clair que substituant cette valeur de y dans l'équation, je dois avoir égal à zero le coefficient de chaque puissance de x. Appellant donc en général $(n)^{(m)}$ le coefficient de x^n dans la suite élevée à la puissance m, j'aurai en général l'équation

$$\begin{aligned}
&A\,(n)^{(m)} \\
&+ A'(n)^{(m-1)} + B'(n-1)^{(m-1)} \\
&+ A''(n)^{(m-2)} + B''(n-2)^{(m-2)} + C''(n+2)^{(m-2)} \\
&+ A'''(n)^{(m-3)} + B'''(n-1)^{(m-3)} + C'''(n-2)^{(m-3)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0
\end{aligned}$$

On

On sait de plus que $(n)^{(m)}$

$$= m a^{m-1}(n) + m \cdot \overline{m-1} \cdot a^{m-2} b (n-1) + m \cdot \overline{m-1} \cdot a^{m-2} \cdot c + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} \cdot a^{m-3} b^2 (n-2)$$

$$+ \overline{m \cdot m-1} \cdot a^{m-2} \cdot d + m \cdot \overline{m-1 \cdot m-2} \cdot a^{m-3} bc + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{m-4} b^3 (n-3)$$

$$+ \overline{m \cdot m-1} \cdot a^{m-2} e + m \cdot \overline{m-1 \cdot m-2} \cdot a^{m-3} bd + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} \cdot a^{m-3} c^2$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2} \cdot a^{m-4} b^2 c + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^{m-5} b^4 (n-4)$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Valeur générale, de laquelle on a facilement les valeurs de $(n)^{(m-1)} \ldots$ de $(n-1)^{m-1} \ldots$

Je substitue ces valeurs dans l'équation précédente, & elle devient

$$A m \cdot a^{m-1} \cdot (n) \quad + A \cdot m \cdot m-1 \cdot a^{m-2} b \cdot (n-1)$$

$$+ A' \cdot m-1 \cdot a^{m-2} \qquad + \left\{ \begin{array}{l} A' \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot a^{m-3} b \\ + B' \cdot m-1 \cdot a^{m-2} \end{array} \right.$$

$$+ A'' \cdot m-2 \cdot a^{m-3} \qquad + \left\{ \begin{array}{l} A'' \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot a^{m-4} b \\ + B'' \cdot m-2 \cdot a^{m-3} \end{array} \right.$$

$$+ A''' \cdot m-3 \cdot a^{m-4} \qquad + \left\{ \begin{array}{l} A''' \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot a^{m-5} b \\ + B''' \cdot m-3 \cdot a^{m-4} \end{array} \right.$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Digitized by Google

$$+A\cdot\left\{\begin{array}{l} m\cdot m-1\cdot a^{m-1}\cdot c\cdot(n-2) \\ +\dfrac{m\cdot m-1\cdot m-2}{1\cdot 2}a^{m-3}b^2 \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l} A'\cdot\left\{\begin{array}{l} m\cdot m-2\cdot a^{m-3}c \\ +\dfrac{m-1\cdot m-2\cdot m-3}{1\cdot 2}a^{m-4}b^2 \end{array}\right. \\ +B'\cdot m-1\cdot m-2\cdot a^{m-3}b \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l} A''\cdot\left\{\begin{array}{l} m-2\cdot m-3\cdot a^{m-4}c \\ +\dfrac{m-2\cdot m-3\cdot m-4}{1\cdot 2}a^{m-5}b^2 \end{array}\right. \\ +B''\cdot m-2\cdot m-3\cdot a^{m-4}b \\ +C''\cdot m-2\cdot a^{m-3} \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l} A'''\cdot\left\{\begin{array}{l} m-3\cdot m-4\cdot a^{m-5}c \\ +\dfrac{m-3\cdot m-4\cdot m-5}{1\cdot 2}a^{m-6}b^2 \end{array}\right. \\ +B'''\cdot m-3\cdot m-4\cdot a^{m-5}b \\ +C''\cdot m-3\cdot a^{m-4} \end{array}\right.$$

$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0.$$

Tirant de cette équation indéfinie la valeur de a, j'aurai la forme du terme général d'une suite égale à la racine d'une équation algébrique, le nombre des termes dont dépendra ce terme général mis sous cette forme, étant le nombre entier plus petit que $n-\frac{n}{m}$. Toutes les fois qu'il

Digitized by Google

faudra pour une valeur particuliere de n, ajouter une quantité conſtante à la valeur générale pour avoir le coefficient de x, il eſt clair que cela indiquera un terme dans la ſuite indéfinie que je place à la fin de mon équation algébrique, dont l'expoſant ſoit cette valeur particuliere de n, & le coefficient, la conſtante multipliée par

$$-Amz^{m-1}+A'\cdot m-1\cdot z^{m-2}+A''\cdot m-2\cdot z^{m-3}+A'''\cdot m-3\cdot z^{m-4}\ldots$$

Cette méthode peut-être utile pour ſommer immédiatement une ſuite donnée, dont le terme général ſoit ſous une forme ſuſceptible d'être comparée à celle que je viens de trouver. En voici quelques exemples.

EXEMPLE I.

Soit la ſuite $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{9}x^4-\frac{8}{81}x^5\pm\ldots$ la loi de la ſuite étant telle que

$$(n)=\frac{-2\cdot\overline{\frac{1}{2}+1}(n-1)+2\cdot\frac{1}{3}(n-2)+2\cdot\frac{2}{3}(n-3)\cdot\ldots}{3}$$

le nombre des termes qui entrent dans cette formule étant l'entier $\frac{n}{2}$, & le coefficient du dernier terme n'étant point multiplié par 2, lorſque n eſt un nombre pair; comparant cette forme avec la forme ci-deſſus, je vois qu'elles conviennent en faiſant, $m=2$; A, A', B', $=1$. Je ferai donc $A=-a\cdot\overline{Aa+A'}=-2, B=-\frac{B'a}{2Aa+A'}+b\cdot\overline{2Aa+A'}=-\frac{5}{2}$; enfin $\Gamma=-\frac{Ab^2+B'b}{2Aa+A'}+c\cdot\overline{2Aa+A'}=-\frac{7}{4}$ & j'aurai l'équation $y^2+xy+y-\frac{7}{4}x^2-\frac{5}{2}x-2=0$. Je la réſous, & j'ai $y=-\frac{1+x}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+3x+2x^2}$. Je

Digitized by Google

fais $x = 0$, & j'ai $y = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} - \frac{1}{2}$. Or y doit par l'hypothèse être égale à 1 dans ce cas; donc je dois prendre le signe + pour avoir la vraie valeur de la somme de la suite.

EXEMPLE II.

Soit la loi d'une suite telle que $A(n) = -B(n-1) - C(n-2) - D(n-3)$, & ainsi de suite jusqu'au terme $n - m + 1$, j'aurai l'équation $y \cdot \overline{A + Bx + Cx^2 + Dx^3} \cdots + A + Bx + \Gamma x^2 + \Delta x^3 \cdots = 0$. Le cas de la formule générale donne toute la théorie des suites récurrentes.

EXEMPLE III.

Soit une suite telle que $(n) = n + 1$, j'aurai $(n-1) = n$, $(n-2) = n-1$; donc $(n) = 2 \cdot (n-1) - (n-2)$; donc, exemple précédent, $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$, $y \cdot \overline{1 - 2x + x^2} + A + Bx + \Gamma x^2 = 0$. Si je veux que $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, j'aurai $y = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 +$ &c. $= \frac{1}{1-2x+x^2}$; mais si je veux que $a = p$, $b = p + 1$, $c = p + 2$, p étant un nombre entier, j'aurai $y = \frac{p + \overline{1-p} \cdot x}{1-2x+x^2}$ multipliant cette nouvelle suite & la valeur par x^{p-1}, & retranchant en suite l'une de l'autre les deux suites & les deux sommes, j'ai en général $1 + 2x + 3x^2 \cdots + \overline{p-1} \cdot x^{p-2} = \frac{1 - px^{p-1} + p - 1 \cdot x^p}{1 - 2x + x^2}$; d'où l'on voit que la méthode peut être utilement employée à trouver la somme d'un nombre indéfini de termes dans une suite quelconque.

Digitized by Google

Je paſſe maintenant au cas plus compliqué, où il s'agiroit d'avoir la forme d'une ſuite, dont la ſomme ſeroit la valeur de y, qu'on peut tirer en général d'une équation algébrique entre x, y & z. Voici comment il faudroit s'y prendre pour avoir cette forme. On ſuppoſera d'abord l'équation ordonnée par rapport à x, & il faudra que chaque ſuite en z, multipliant chaque puiſſance de x, ſoit algébrique : on aura donc la loi de cette ſuite par ce qui précede ; mais il faudra auſſi que l'ordonnant par rapport à z, la ſuite en x, qui multipliera chaque puiſſance de z, ſoit algébrique ; donc on aura la loi de cette ſuite. Mais les coefficiens de cette ſuite ſont les coefficiens des mêmes puiſſances de z, pris ſucceſſivement dans chaque ſuite en z, qui multiplie les diverſes puiſſances de x ; donc on aura la loi des coefficiens, & par conſéquent la loi de la ſuite, pour qu'elle donne une fonction algébrique de x & z pour valeur de y. L'analogie indique ſuffiſamment ici ce qu'il y auroit à faire pour un plus grand nombre de variables.

Pour appliquer la théorie ci-deſſus à l'intégration, on ſuppoſera une ſuite algébrique de tranſcendantes & de x, ces tranſcendantes étant des logarithmes exponentielles ou intercendantes de ſuites algébriques ; & comme le dégré où monte l'équation qu'on doit avoir entre chaque ſuite & ſa ſomme eſt déterminé, mais ſeulement par la plus haute puiſſance de la ſomme, on ſuppoſera que le coefficient de chaque puiſſance de y en x, au lieu d'être déterminé eſt indéfini, ou même la ſomme d'une ſuite récurrente. La forme de la ſuite étant donnée dans cette

nouvelle ſuppoſition, forme qu'on aura aiſément par ce qui précede; il ne reſtera plus d'indéfini que les dénominateurs & les numérateurs des ſommes des ſuites récurrentes, & le nombre des fonctions logarithmiques qui peuvent être ajoutées enſemble, ſans que la propoſée change de forme: pour les déterminer pour chaque cas particulier, on ſuppoſera d'abord qu'ils ſont déterminés au-deſſous de ce qu'ils doivent être, & on ajoutera ſeulement à la valeur de chaque coefficient, ce qu'une ſuppoſition plus élevée y changeroit; on comparera enſuite, avec la propoſée, ces ſuites ainſi préparées, & la comparaiſon conduira enfin à un point où il n'y aura plus rien à ajouter pour avoir la valeur du coefficient, & tout ſera déterminé. Voici un exemple de cette méthode qui la fera mieux comprendre.

Soit le cas des fractions rationnelles,

$$dy = \frac{A + Bx + Cx^2 \cdots + Px^m}{A' + B'x + C'x^2 \cdots + P'x^m} dx$$

& qu'il faille trouver y. Je réduis en ſuite le coefficient de dx; je vois alors que la valeur de y en ſuite, ne peut être que l. $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots + a' + b'x + c'x^2 + \ldots$ la ſuite $a' + b'x + c'x^2 \ldots$ étant une ſuite récurrente, & la ſuite $a + bx + cx^2 \ldots$ la ſomme d'un nombre indéfini de ces ſuites, je compare la valeur de dy donnée dans cette hypotèſe, avec la valeur donnée par la propoſée, en ſuppoſant que les ſuites $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$. $a' + b'x + c'x^2 \ldots$ ſoient des ſuites récurrentes fort ſimples; j'ajoute à chaque terme une quantité conſtante, ſi elle ne devient pas en général égale à zero, je la ſup-

Digitized by Google

poſe ce qu'elle doit être dans une ſuppoſition où ces ſuites ſoient plus compliquées, plus une nouvelle indéterminée, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que cette nouvelle indéterminée ſoit nulle en général, & alors le Problême ſera réſolu. Au reſte, cette opération ne ſera pas auſſi longue qu'on le croiroit d'abord, parceque les ſuites qu'on ſubſtitue dans la propoſée ne pouvant contenir dans leurs coefficiens plus de quantités indépendantes de la loi de la ſuite qu'on n'en trouve dans le coefficient de dx.

Il eſt aiſé de voir qu'on pourra dans cette méthode dreſſer des Tables qui contiendroient par ordre toutes les équations intégrales qui donnent y en x, avec les équations différentielles qui y répondent & les changemens qui y peuvent faire de nouvelles ſuppoſitions pour le nombre & l'élévation des ſuites récurrentes.

Quoique cette méthode, traitée ainſi par les ſuites infinies, dont il ne ſeroit pas difficile de ſe paſſer, ſoit d'une grande commodité dans la pratique, & qu'elle conduiſe à une intégration abſolue; ſa plus grande utilité ſera pourtant de ſervir aux approximations immédiatement & de la maniere la plus commode. Toute équation différentielle peut, par la préparation que j'ai indiquée ci-deſſus, être, lorſqu'elle eſt poſſible, telle que y ſubſtituant pour y $a + bx + cx^2 + dx^3 \cdots$ tous les coefficiens des puiſſances de x s'évanouiſſent; & cette ſuite étant rendue convergente, donnera une valeur de y, d'autant plus vraie, qu'on prendra plus de termes, avec cette différence cependant, que ſi on peut tirer de l'équation propoſée une valeur de y en x en termes finis; la différence qu'il

y aura entre la valeur de y prise dans la suite & sa vraie valeur, pourra être supposée plus petite qu'aucune quantité donnée, & que la somme de la suite sera cette vraie valeur; au lieu que dans l'autre cas, on peut, à la vérité, parvenir à un terme, dans la suite, plus petit qu'aucune quantité donnée; mais jamais on ne peut parvenir à la vraie valeur. C'est à-peu-près la même chose que si l'on proposoit d'avoir $\sqrt{1-n}$ en nombres rationels. L'expression étant développée en suite, si $n = \frac{3}{4}$, on parviendra à la fin à la vraie valeur $\frac{1}{2}$; mais si $n = \frac{1}{2}$, quoique plus on prend de termes, plus on approche de la valeur de $\sqrt{\frac{1}{2}}$ en nombres rationels, si elle en avoit une; jamais cependant on ne peut parvenir à cette valeur, parce qu'elle n'en a point.

La suite $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$ étant substituée dans l'équation différentielle en proposée, & étant rendue convergente, donne déja une méthode d'avoir y en x par approximation; mais il s'en faut beaucoup que ce soit-là la borne de l'utilité des méthodes précédentes. De quelque maniere que y soit donné en x, dès qu'il est question d'approximations, il est clair que la valeur de x étant donnée, on aura, par les Tables de logarithmes, sinus, &c. la valeur de y qui y répond. Je prendrai donc une forme générale qui convienne avec l'ordre d'une équation différentielle proposée. Je supposerai d'un nombre fini de termes les différentes suites algébriques qui entreront dans les valeurs de r, s, t, &c. en x; x & r; x, r, s; &c. & aussi la suite algébrique qui donne y en x, r, s, t, &c. Je substituerai

ſubſtituerai dans la propoſée la ſuite ainſi terminée; j'en déterminerai les coefficiens; & ajoutant à cette valeur, ainſi trouvée, ce qu'il faut y ajouter, pour qu'étant réduite en ſuite, elle donne la ſuite $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$ que j'ai dit ci-deſſus être la valeur de y, j'aurai une nouvelle valeur de y: ſuppoſant un terme de plus dans les r, s, t, &c. & dans l'équation finie entre y & x, r, s, t. &c. j'aurai encore une nouvelle valeur de y; & ſi ces valeurs ſont de la forme que doit avoir la vraie valeur de y, & que la ſuite $a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$ ſoit convergente, on aura par cette méthode des valeurs très approchées, en ne prenant qu'un petit nombre de termes dans la ſuite qui reſte dans chaque valeur.

Quant à la maniere de faire en ſorte que la ſuite ſoit convergente, il faut remarquer que cette convergence vient ou de la petiteſſe de x ou de celle des coefficiens: il faudra donc pour ce qui regarde x, faire en ſorte, par des ſubſtitutions convenables que x ſoit telle (ſi la nature du Problême le permet), ce qui arrivera, ſoit qu'on puiſſe avoir une variable x toujours plus petite qu'une quantité conſtante donnée, qu'on a ſuppoſée égale à l'unité, & qui rend homogene la ſuite en x, ſoit qu'on puiſſe ſuppoſer cette quantité conſtante ſi grande qu'on voudra, en ſorte qu'on puiſſe regarder x comme très petite vis-à-vis d'elle: ſi cela étoit impoſſible, parceque x ne pourroit jamais être qu'une quantité ſuſceptible d'avoir toutes les valeurs poſſibles; alors on pourroit rendre la ſuite convergente, tant que x ſera très petite; faire enſuite une autre ſuppoſition pour avoir z très petite lorſque x ſera grande; une autre pour le cas où x ſera à-peu-près égale au parametre, & l'on parviendra ainſi au but qu'on ſe propoſe.

Digitized by Google

Quant aux coefficiens, il faudra chercher une méthode convenable dans chaque cas particulier. Lorſqu'il eſt poſſible, comme dans le Problême des trois Corps, d'avoir par des Obſervations ou d'autres circonſtances particulieres des valeurs particulieres de y pour des valeurs données de x; on pourra s'en ſervir commodément pour avoir les coefficiens de la ſuite. Si même on vouloit ſe contenter de comparer les réſultats de la Théorie avec ceux des Obſervations, on le pourroit faire en comparant les coefficiens trouvés dans la ſuite, par le moyen des Obſervations, avec ceux que donne la ſubſtitution de la ſuite dans l'équation différentielle. En effet, ſi ces coefficiens different peu, que la ſuite ſoit convergente ou non, il ſera toujours vrai que les Obſervations & la Théorie s'accordent enſemble. On pourroit encore réſoudre ces ſortes de Problêmes par cette méthode ſeule, ſans employer leurs équations différentielles lorſque les ſuites ſeront convergentes, & par conſéquent indépendamment de toute hypothèſe phyſique. Cette derniere méthode pourroit ſervir à calculer des Phénomenes dont les loix ſeroient inconnues, pourvu qu'on ſache de quoi ces loix peuvent dépendre. Mais il eſt eſſentiel d'obſerver ici qu'il n'eſt vrai, que quelqu'équation qu'on ait entre y & x, on aura $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ .... que dans le cas où on a fait la ſubſtitution indiquée ci-deſſus; qu'il faut donc qu'il y ait une conſtante indéterminée g; & qu'au lieu d'avoir la valeur de x par les Obſervations, on a ſeulement celle $x + g$; & qu'ainſi, lorſqu'on veut déterminer les coefficiens par les obſervations, il faut mettre pour x cette valeur moins l'indéterminée g. Pourvu qu'on ne donne pas

Digitized by Google

à g une valeur particuliere, on peut la ſuppoſer incomparablement plus grande ou plus petite qu'aucune autre quantité, ce qui peut quelquefois ſervir avantageuſement à rendre la ſuite convergente.

On ſent qu'il ſeroit très avantageux d'avoir pour déterminer les coefficiens par le moyen des Obſervations, une formule indéfinie pour un nombre indéfini de coefficiens & d'obſervations. Ce Problême ſe réduit à trouver la valeur d'une inconnue donnée par un nombre indéfini n d'équation entre un nombre indéfini n d'inconnues; je tire cette méthode du Mémoire que j'ai déja cité ici. Soient $a, b, c, d, e \ldots\ldots p$ ces inconnues, & qu'on ait

$$\begin{aligned}
&\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e \ldots\ldots + \Pi p = A\\
&\alpha' a + \beta' b + \gamma' c + \delta' d + \varepsilon' e \ldots\ldots + \Pi' p = A'\\
&\alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c + \delta'' d + \varepsilon'' e \ldots\ldots + \Pi'' p = A''\\
&\alpha''' a + \beta''' b + \gamma''' c + \delta''' d + \varepsilon''' e \ldots\ldots + \Pi''' p = A'''\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Il eſt clair qu'on aura en général

$$p = \frac{\dfrac{A}{\alpha} - \dfrac{A'}{\alpha'}}{\dfrac{\beta}{\alpha} - \dfrac{\beta'}{\alpha'}} - \frac{\dfrac{A'}{\alpha'} - \dfrac{A''}{\alpha''}}{\dfrac{\beta'}{\alpha'} - \dfrac{\beta''}{\alpha''}} - \frac{\dfrac{A''}{\alpha''} - \dfrac{A'''}{\alpha'''}}{\dfrac{\beta''}{\alpha''} - \dfrac{\beta'''}{\alpha'''}} \cdots$$

$$\cdots - \frac{\dfrac{\dfrac{A}{\alpha} - \dfrac{A'}{\alpha'}}{\dfrac{\beta}{\alpha} - \dfrac{\beta'}{\alpha'}} - \dfrac{\dfrac{A'}{\alpha'} - \dfrac{A''}{\alpha''}}{\dfrac{\beta'}{\alpha'} - \dfrac{\beta''}{\alpha''}}}{\dfrac{\dfrac{\gamma}{\alpha} - \dfrac{\gamma'}{\alpha'}}{\dfrac{\beta}{\alpha} - \dfrac{\beta'}{\alpha'}} - \dfrac{\dfrac{\gamma'}{\alpha'} - \dfrac{\gamma''}{\alpha''}}{\dfrac{\beta'}{\alpha'} - \dfrac{\beta''}{\alpha''}}} - \frac{\dfrac{\dfrac{A'}{\alpha'} - \dfrac{A''}{\alpha''}}{\dfrac{\beta'}{\alpha'} - \dfrac{\beta''}{\alpha''}} - \dfrac{\dfrac{A''}{\alpha''} - \dfrac{A'''}{\alpha'''}}{\dfrac{\beta''}{\alpha''} - \dfrac{\beta'''}{\alpha'''}}}{\dfrac{\dfrac{\gamma'}{\alpha'} - \dfrac{\gamma''}{\alpha''}}{\dfrac{\beta'}{\alpha'} - \dfrac{\beta''}{\alpha''}} - \dfrac{\dfrac{\gamma''}{\alpha''} - \dfrac{\gamma'''}{\alpha'''}}{\dfrac{\beta''}{\alpha''} - \dfrac{\beta'''}{\alpha'''}}} \cdots$$

$$\cdots - \frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A}{\alpha} - \dfrac{A'}{\alpha'}}{\dfrac{\beta}{\alpha} - \dfrac{\beta'}{\alpha'}} - \dfrac{\dfrac{A'}{\alpha'} - \dfrac{A''}{\alpha''}}{\dfrac{\beta'}{\alpha'} - \dfrac{\beta''}{\alpha''}}}{\dfrac{\dfrac{\gamma}{\alpha} - \dfrac{\gamma'}{\alpha'}}{\dfrac{\beta}{\alpha} - \dfrac{\beta'}{\alpha'}} - \dfrac{\dfrac{\gamma'}{\alpha'} - \dfrac{\gamma''}{\alpha''}}{\dfrac{\beta'}{\alpha'} - \dfrac{\beta''}{\alpha''}}} - \dfrac{\dfrac{\dfrac{A'}{\alpha'} - \dfrac{A''}{\alpha''}}{\dfrac{\beta'}{\alpha'} - \dfrac{\beta''}{\alpha''}} - \dfrac{\dfrac{A''}{\alpha''} - \dfrac{A'''}{\alpha'''}}{\dfrac{\beta''}{\alpha''} - \dfrac{\beta'''}{\alpha'''}}}{\dfrac{\dfrac{\gamma'}{\alpha'} - \dfrac{\gamma''}{\alpha''}}{\dfrac{\beta'}{\alpha'} - \dfrac{\beta''}{\alpha''}} - \dfrac{\dfrac{\gamma''}{\alpha''} - \dfrac{\gamma'''}{\alpha'''}}{\dfrac{\beta''}{\alpha''} - \dfrac{\beta'''}{\alpha'''}}} \cdots \text{ \&c.}$$

& ainſi de ſuite, où en général on peut ſuppoſer $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$, &c. égaux à l'unité. On aura donc p donné par une fraction, dont le Numérateur & le Dénominateur ne différeront qu'en ce que l'un ſera compoſé de A, A', A'', A''', &c., de la même maniere que l'autre le ſera de Π, Π', Π'', Π''', &c., & on formera cette valeur de p ſucceſſivement de la maniere qu'on voit figurée ici; d'où l'on voit que le nombre des $\dfrac{\frac{A}{\alpha}-\frac{A'}{\alpha'}}{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\beta'}{\alpha'}}$ ou $\dfrac{A-A'}{\beta-\beta'}$, lorſque $\alpha, \alpha', \alpha''$, &c. ſeront égaux à l'unité, ſera 4^{n-2}, & qu'ils ſeront toujours diſtribués quatre à quatre d'une maniere ſemblable.

Dans le cas dont il eſt particulierement queſtion ici, on a les $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$, &c. égaux à l'unité, les $\beta, \beta', \beta'', \beta'''$, &c. égaux aux valeurs de x données par un nombre n d'obſervations, les $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma'''$, &c. égaux aux valeurs de x^2 données de mêmes, & ainſi de ſuite; les Π, Π', Π'', Π''', &c. égaux aux valeurs de x^n, & enfin les A, A', A'', A''', &c. égaux aux valeurs correſpondantes de y, que donnent les mêmes obſervations.

Je n'en dirai pas davantage, mon but étant de donner des principes généraux, ſans entrer dans des détails qui faciliteroient aux autres des routes que je n'ai point le courage de ſuivre.

Digitized by Google

CONCLUSION.

TELLES ſont les vues que je propoſe aux Géometres ſur un Problême dont la ſolution étoit ſi importante pour le ſyſtême du monde, & qui a ſi bien confirmé ce que Newton avoit déduit du mouvement des Planettes principales.

Mes équations *dans les deux premiers Mémoires*, ſont les mêmes que celles que le principe de la moindre action donne à M. de la Grange ; & quoique tirées d'un principe différent, je les ai par la même Méthode. Cette façon de ſuppoſer que la même changeante varie de pluſieurs manieres à la fois, eſt la clef d'une infinité de Problêmes ; & lorſqu'elle ſera mieux connue, on en ſentira encore mieux tous les avantages. Mon but n'a point été de réſoudre le Problême dont j'ai parlé, mais d'indiquer la voie qu'on pourroit ſuivre pour le réſoudre généralement, directement & exactement. Le Problême des trois Corps a été réſolu par trois célebres Géometres. Ils ont cherché à en tirer une Théorie plus exacte de la Lune & des Cometes, qui pût ſervir à perfectionner l'Aſtronomie & la Navigation, & à confirmer les idées de Newton ſur le ſyſtême du monde. Ils ſe ſont ſervis pour cela des Méthodes d'Approximation, les ſeules qui conviennent à ces ſortes de queſtions, ſitôt qu'il s'agit de faire quelqu'application de la Théorie. Je ſuppoſe en effet que les équations du Problême ſoient intégrées exactement. S'il s'y trouve quelque fonction tranſcendante, ou même qu'en prenant la valeur du temps en l'une des coordonnées, ou celle d'une des coordonnée en une autre, on ait à réſoudre une équa-

Digitized by Google

tion des ſecond, troiſieme, quatrieme..... dégrés; on aura des radicaux ou des fonctions tranſcendantes dans les formules du Problême. Il faudra donc y faire entrer des ſuites infinies & avoir encore recours aux Méthodes d'Approximation. Qu'on ſe ſerve donc de ces Méthodes avant d'intégrer, ou qu'on ne les applique aux équations qu'après l'intégration; je n'y vois aucune différence: mais il y a des conditions néceſſaires pour toute Méthode d'Approximation, qu'il n'eſt pas toujours aiſé de remplir, lorſqu'on les applique aux équations différentielles. 1°. Il faut que la ſuite donnée dans la Méthode d'Approximation, car dans toute Méthode d'Approximation il entre néceſſairement une ſuite infinie; il faut, dis-je, que cette ſuite ſe puiſſe continuer à l'infini, ſans pouvoir s'arrêter à aucun terme & y changer, ſoit de forme, ſoit de nature; & que plus on prend de termes ou un terme plus éloigné du premier, la ſomme de la ſuite ou bien de ce terme plus éloigné, differe moins; & il faut non-ſeulement que cela ſoit, mais encore que cela ſoit bien prouvé à priori. 2°. L'identité, ſoit de la ſomme de la ſuite entiere, ſoit de ſon dernier terme avec la vraie valeur, ou une valeur ſenſiblement égale à la vraie, doit être rigoureuſement démontrée; & ſi les coefficiens dans les ſuites ſe déterminent par la Méthode des indéterminées, il faut avoir démontré à priori que la forme qu'on lui ſuppoſe eſt celle qu'elle doit avoir. La Méthode de M. d'Alembert remplit exactement tout ce que je viens de dire: ainſi tout ce qu'on pourroit faire ne conduiroit au but, ni plus directement, ni plus exactement: en effet, ſi on deſire plus d'exactitude, il n'y a qu'à continuer plus loin ſes formules, & y

Digitized by Google

faire entrer l'altération du mouvement que l'Auteur de la piece couronnée en 1762, a appris à calculer. Ce travail doit particulierement regarder les Aſtronômes : il exige, à la vérité beaucoup de connoiſſances de calcul, & peut-être plus qu'on n'en peut acquérir ordinairement, ſans négliger les autres parties de l'Aſtronomie. Mais il n'en eſt pas moins vrai que ce que le Géometre peut faire maintenant ſur ce ſujet comme Géometre, n'eſt plus que de pure curioſité.

J'ai cru ce détail néceſſaire pour qu'on ne fût pas étonné des bornes où je me ſuis renfermé ſur le Problême des trois Corps. Quant aux travaux néceſſaires pour les Problêmes plus compliqués, j'avoue franchement que je les crois au-deſſus de mes forces, & ſur tout de mon courage : bien que, dans les divers morceaux que la néceſſité de défendre ſa ſolution a fait publier à M. d'Alembert, on trouve ſur les Méthodes d'Approximation, & ſur tout ſur la maniere de s'aſſurer de leur bonté indépendamment des réſultats, nombre de choſes qui ſeroient de la plus grande utilité, & qu'une ſagacité ſinguliere pouvoit ſeule deviner & employer.

Le peu que j'ai dit au commencement du *troiſieme Mémoire*, eſt ſuffiſant pour faire ſentir aux Géometres de quelle Méthode ils pourroient ſe ſervir pour réſoudre un Problême célebre dans la ſolution duquel on n'avoit, depuis Deſcartes, fait que peu de progrès. La Méthode que je propoſe eſt générale pour un dégré quelconque, & je l'ai miſe au point de ne laiſſer plus pour déterminer la forme des racines d'une équation donnée, d'autres difficultés à réſoudre que celles qui naîtront néceſſairement de la

*

complication & de la longueur des calculs. M. Euler a fait ſur cette matiere quelques réflexions ſemblables, qu'il propoſe comme des conjectures : un peu de méditation ſuffit pour s'aſſurer que les miennes ſont une ſuite néceſſaire de la nature des équations. Il n'y a rien de commun entre l'Ouvrage de M. Fontaine ſur cette matiere, & mes courtes réflexions. Ce grand Géometre détermine la forme des racines d'une équation en cherchant par comparaiſon entre toutes les formes poſſibles, celles qui peuvent convenir à une équation propoſée. Il conſidere les racines comme réelles ou imaginaires, poſitives ou négatives, compoſées de quantités égales ou inégales, plus grandes ou plus petites les unes par rapport aux autres; mais cela ne conduit pas immédiatement à en avoir la valeur. Comme ce travail eſt très intéreſſant, je crois que les Géometres me pardonneront d'inſérer ici quelques réflexions qui tendent à démontrer & à développer l'eſprit de la Méthode, que ſon célebre Auteur n'a fait qu'expoſer. Je ſuppoſe qu'on ait devant les yeux l'Ouvrage de M. Fontaine, qui ſe trouve dans le Recueil de ſes Œuvres, & dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1747; & je dis, 1°. Que ſi j'ai une équation du dégré f, dont les racines ſoient miſes ſous les formes que leur donne M. Fontaine, & que ces racines ne contiennent qu'un nombre g, inférieur à f de quantités $a, b, c \ldots\ldots$, j'aurai pour ce cas un nombre $f-g$ de fonctions de $m, n, p \ldots\ldots$ égales à zéro. En effet, par la comparaiſon de la propoſée avec le produit de ſes racines, j'aurai un nombre f d'équations pour un nombre g d'indéterminées. Ces fonctions qu'on trouvera différentes pour chaque ſuppoſition différentes de facteurs ſe trouveront

trouveront sous une forme rationelle par les procédés connus, & les égalant à zéro, on aura des conditions pour chaque système de facteurs; car les équations de chaque système prises toutes ensemble, auront toujours lieu dans chaque système, & ne pourront avoir lieu dans aucun autre. 2°. Que si j'ai un système de facteurs qui contienne un certain nombre de a, b, c ....., j'aurai plus grande ou plus petite que zéro, une fonction qui deviendra égale à zéro; lorsque faisant, par exemple, $b = c$ ou $c = 0$, ce système de facteurs deviendra un de ceux dont je parle dans l'article ci-dessus. Il y aura autant de ces fonctions, qu'il y aura de suppositions possibles pour ramener le système de facteurs donné à un autre système qui contienne une de moins des quantités a, b, c ...., & ces fonctions seront telles qu'en les supposant nulles, & y faisant les suppositions qui les rendent telles, elles donnent les équations qu'on auroit trouvées par l'article précédent. 3°. Que si pour un cas particulier d'un système de facteurs, une de ces fonctions est plus grande ou plus petite que zéro: elle sera du même signe dans tous les autres cas du même système. En effet, si cette fonction est telle que, faisant $b = c$ ou $c = 0$, elle devienne zéro; elle sera $A \cdot \overline{b - c}^{h}$ ou $A c^{h}$. Or, une telle fonction sera toujours du même signe, puisqu'on a $b > c$, $c > 0$, & que A ne peut changer de signe. En effet, si A pouvoit changer de signe, il pourroit devenir zéro; donc la fonction proposée égalée à zéro ne seroit plus une condition du système de facteurs où elle a lieu, ce qui est contre l'hypothèse. 4°. Qu'il faut distinguer trois cas où ces sortes de fonctions peuvent servir de con-

Digitized by Google

ditions pour distinguer différens systêmes de facteurs. D'abord deux systêmes de facteurs peuvent être rappellés à un même systême, en faisant $b=c$. La fonction qui, après cette supposition sera égale à zéro, sera dans un cas $A\cdot\overline{b-c}^{h}$, & dans l'autre $A\cdot\overline{c-b}^{h}$; cela est évident par la forme des facteurs de chaque systême, & h doit être un nombre impair; sans quoi un systême seroit l'autre, ce qui est contre l'hypothèse; donc, la même fonction sera pour un systême de facteurs >0 & <0 pour l'autre. Dans le second cas, deux systêmes de facteurs se peuvent rappeller à un même systême, en faisant dans l'un $b=c$, & dans l'autre $c=0$: ce cas a lieu pour la comparaison de deux systêmes, dont l'un contient plus d'imaginaires que l'autres. Il faut donc que la fonction qui est pour l'un $A\cdot\overline{b-c}^{h}$ devienne pour l'autre nulle, lorsque $c=0$; mais l'un des systêmes de facteurs devient l'autre, en y mettant $b-c$ pour $c\sqrt{-1}$; donc $A\cdot\overline{b-c}^{h}$ doit devenir $A\cdot\overline{c\sqrt{1}}^{h}$; donc h doit être pair, puisque A est réel; donc la fonction qui sera <0 pour un systême, sera <0 pour le systême correspondant. Dans le troisieme cas, une même supposition rappelle deux systêmes de facteurs à deux différens, mais dans lesquels une même fonction est égale à zéro; & alors, ou elle est de signe différent dans les deux premiers systêmes, ou elle est de même signe, & les fonctions qui sont >0 ou 0 dans le cas où elles deviennent nulles, ne changent pas alors de signe: ce cas se démontrera comme les précédents.

Digitized by Google

Il n'y a point de ſyſtême de facteurs pour un dégré quelconque, dont on ne puiſſe trouver les conditions caractériſtiques par cette méthode; & il ne ſera queſtion que d'avoir pour un dégré quelconque, les conditions générales pour chaque ſyſtême où il n'entre qu'une quantité a: car quelques ſoient le nombres des $a, b, c \ldots\ldots$ dans un ſyſtême propoſé, on tirera ces conditions de celles des ſyſtêmes où ce nombre ſera moindre d'une unité, & ainſi de ſuite, juſqu'à celles des ſyſtêmes où il n'y a qu'une quantité a.

Lorſque le nombre des $a, b, c \ldots\ldots$ eſt plus petit que l'expoſant du dégré de l'équation : alors, ſi les $a, b, c \ldots\ldots$ ſont eux-mêmes les racines d'une autre équation d'un dégré inférieur, comme cela arrive néceſſairement lorſqu'il n'y en a que deux, on réſolvera la propoſée en réſolvant cette nouvelle équation d'un dégré inférieur; & dans tout autre cas, on pourra parvenir à une équation de même dégré, mais dont les coefficiens ſeront les racines d'une équation d'un dégré, dont l'expoſant ſoit égal au nombre de fois que les $a, b, c \ldots\ldots$ ſont répétés dans les racines.

Digitized by Google

ÉCLAIRCISSEMENT

Sur le Calcul Intégral.

UN grand Géometre que je cite ici, non pour lui faire honneur, mais pour m'honorer moi-même, en apprenant au Public qu'il daigne s'occuper de mes Ouvrages & me favoriſer même de ſes conſeils; M. de la Grange m'a fait obſerver qu'il y a des équations différentielles, dont les intégrales ne ſe trouvent point dans les Tables que j'ai données pour ces équations, dans la ſeconde Section de la premiere Partie de mon Ouvrage; d'où il ſuit que ces Tables que je donne pour générales, ſont au moins ſujettes à une infinité d'exceptions. L'importance de la matiere exige de moi qu'en convenant franchement de mon tort, je cherche à le réparer. Je me propoſe de le faire ici; & pour cela, je vais expliquer la nature de ces exceptions qui détruiſent la généralité de mes Tables, & les moyens d'y remédier; j'y joindrai quelques Réflexions importantes ſur cette matiere qui m'étoient échappées: je donnerai enfin une méthode d'intégrer qui ne ſuppoſera point la conſtruction des Tables. Il me ſemble qu'il ſera aiſé de conclure de ce que je vais dire, que la défectuoſité de mes Tables eſt un défaut de la méthode; défaut qui eſt une ſuite de la nature même du Calcul, en ſorte qu'il n'y ait aucune méthode générale poſſible de Calcul Intégral qui ne ſoit ſujette à des inconvéniens ſemblables, ou à de plus grands encore; que la maniere d'y ſuppléer que je propoſe ici eſt

Digitized by Google

auſſi ſimple qu'elle peut l'être par les mêmes raiſons. Je crois que ceux qui auront lu avec attention toute la premiere Partie de mon Ouvrage & ce que j'y vais ajouter ici, ne trouveront pas cette aſſertion téméraire, & me diſpenſeront d'entrer dans le détail des motifs qui m'engagent à penſer ainſi.

Les Tables que je donne dans l'Article troiſieme, p. 53, contiennent par ordre les différentes formes d'intégrales qui, étant différentiées, produiſent les équations différentielles d'une forme donnée : telle eſt le principe ſur lequel je les ai conſtruites, & elles ſont générales dans ce ſens. Mais ſi je donne des valeurs particulieres aux coefficiens de ces formules que j'ai ſuppoſés généraux, les différentielles qui en réſultent peuvent peut-être s'abaiſſer, ſans que les intégrales changent de forme ; & cela arrivera, ſoit que les coefficiens des termes les plus élevés de ces différentielles s'évanouiſſent, ſoit que ces différentielles aient des facteurs. Alors les différentielles d'un dégré donné pourroient avoir pour intégrales ou les intégrales générales pour ce dégré, ou des cas particuliers d'intégrales ſupérieures où l'abbaiſſement ait lieu. Il faut donc pour avoir les intégrales de cette derniere claſſe d'équations, former une Table qui contienne tous ces cas particuliers. Voilà où je m'étois arrêté, & ce dont les obſervations de M. de la Grange m'ont fait ſentir la néceſſité.

Quelque particuliere que ſoit une forme d'intégrale, elle eſt toujours telle, excepté pour le cas de $ax+by+cp=o$, que dans l'équation différentielle qui y répond, il puiſſe y avoir cinq coefficiens indéterminés, parcequ'on n'y chan-

Digitized by Google

ge en aucune façon la forme de l'intégrale ni de la différentielle, en faisant $x = Az + Bu + Cp$, & $y = A'z + B'u + C'p$; mais il s'en faut de beaucoup qu'aucune des formes d'intégrales que donnent mes Tables, laissent indéterminés tous les coefficiens de la différentielle qui y répond. Cependant, l'équation différentielle où ils sont supposés quelconques, a une intégrale, comme je l'ai démontré dans la premiere Partie, Section premiere. Cette intégrale est donc pour chaque dégré une des formules générales des dégrés supérieurs. Il faut que cette forme contienne au moins autant de coefficients indéterminés, qu'il y en a dans l'équation différentielle ; il faut encore qu'elle soit telle que le cas particulier où l'abaissement a lieu, ne le rappelle pas à une forme d'un dégré inférieur, cela seroit contre l'hypothèse, & que les conditions de cet abaissement laissent un nombre de coefficiens indéterminés, égal à celui des coefficiens de la différentielle. La Table des cas où cet abaissement a lieu, donnera les intégrales qui satisfont à ces conditions pour chaque dégré ; & ces intégrales ne seront pas fort élevées, par rapport aux dégrés auxquels elles appartiendront ; parceque plus on les supposera élevées, plus le nombre des équations entre les coefficiens, surpassera celui des coefficiens qu'on a à déterminer, en supposant que ceux de la différentielle sont quelconques. Cette forme générale étant trouvée, il y aura des cas particuliers qui lui échapperont ; les uns appartiendront à des formes moins compliquées, on les aura par ce que j'ai dit ; d'autres appartiendront à des formes plus compliquées, j'en parlerai ci-dessous ; d'autres enfin

Digitized by Google

n'appartiendront à aucune forme, & ce ſont ceux où la différentielle auroit un facteur ; car dans ce cas, ſi ce facteur n'eſt pas un de ceux par leſquels on peut avoir beſoin de multiplier l'équation différentielle, pour qu'elle ſoit la différentielle exacte de ſon intégrale, il n'y a aucune équation intégrale qui puiſſe produire l'équation différentielle, miſe ſous cette forme. Il eſt donc indiſpenſable, avant que de chercher à intégrer par le moyen des Tables, de s'aſſurer par les méthodes ordinaires, que la propoſée n'a point de facteurs, & de l'en débarraſſer ſi elle en a.

Ce que je viens de dire des équations à deux variables, eſt également vrai pour un nombre quelconque de variables, en obſervant que le nombre des coefficiens qui reſteront toujours indéterminés, ſera pour un nombre n de variables, $n \cdot \overline{n+1} - 1$; & qu'au lieu d'une équation différentielle où tous ſes coefficiens ſoient indéterminés, on aura à traiter une équation où ils ne feront liés entr'eux que par les conditions néceſſaires pour que ces équations ſoient poſſibles.

J'ai déja dit que l'abaiſſement des équations différentielles avoit lieu de deux manieres. La premiere, lorſque les coefficiens des puiſſances des variables ſe trouvent nuls dans un ou pluſieurs des rangs ſupérieurs de l'équation différentielle. Soit, par exemple,

$$\overline{\nu y^2 + \varepsilon p y + \nu p^2} \cdot dx + \overline{\Pi' x^2 + \delta' p x + \nu' p^2} \cdot dy = 0.$$

L'intégrale de cette équation eſt par les méthodes ordinaires $\frac{\nu}{b-a} \cdot l\frac{x+a}{x+b} + \frac{\Pi'}{b'-a'} \cdot l\frac{y+a'}{y+b'} + N = 0$, a & b étant les racines de l'équation $\Pi' x^2 + \delta' p x + \nu' p^2 = 0$; & a' & b'

les racines de l'équation $\nu y^2 + \epsilon py + \nu p^2 = 0$. Cet exemple m'a été proposé par M. de la Grange. Maintenant, je dis que cette équation intégrale appartient aux formes pour le troisieme dégré; en effet, si on différentie une intégrale semblable, en donnant une forme générale aux fonctions qui y entrent, on aura une différentielle de ce dégré : mais qu'ici elle est du second, parceque ces fonctions sont telles que les coefficiens de tous les termes qui monteroient au troisieme dégré sont égaux à zéro; la même chose aura lieu pour-tout autre exemple. Mais comment cela arrive-t-il ? c'est que plusieurs des fonctions qui entrent dans les formes d'intégrales, ont égaux, entr'eux, les coefficiens des rangs supérieurs des puissances de x & y qui y entrent, ce qui fait que les termes supérieurs qu'ils auroient produits dans l'équation différentielle, peuvent disparoître tous entiers. Pour former donc une Table de tous ces cas, je supposerai dans chacune des formules, des Tables construites, comme je l'ai indiqué ci-dessus, que les coefficiens de plusieurs rangs supérieurs sont égaux chacun à chacun dans deux ou plusieurs des fonctions qui y entrent, & cela, selon toutes les combinaisons possibles; je remarquerai celles de ces suppositions qui peuvent faire évanouir un ou plusieurs rangs supérieurs dans les différentielles, sans que les intégrales changent de forme; je les ordonnerai ensuite, comme j'ai ordonné les formules de mes Tables. Cet abaissement ne va pas à l'infini, en ne supposant même dans une intégrale que deux fonctions essentiellement différentes; en sorte que toutes les autres

ne

Digitized by Google

ne different de l'une ou de l'autre que par le dernier terme, ce qui eſt la ſuppoſition la plus ſimple, on verra naître des différentielles de tous les dégrés. J'ajouterai ces Tables, ainſi conſtruites, à celles que j'avois déja, & j'aurai de nouvelles Tables qui contiendront pour chaque dégré d'équations différentielles, tant les formes générales qui y répondent, que les formes qui réſultent des cas particuliers où d'autres formes plus élevées s'abaiſſent à ce dégré par l'évanouiſſement de leurs rangs ſupérieurs.

La ſeconde eſpece d'abaiſſement a lieu, lorſque dans un cas particulier une forme générale eſt telle, que l'équation différentielle qui y répond, puiſſe avoir un facteur d'un ou pluſieurs dégrés. Soit, par exemple, l'équation

$$\overline{xy^2 - x - 2ny} \cdot dx + x\,dy = 0$$

Son intégrale eſt en général

$$\int \overline{2a-1} \cdot x + \overline{3b-a} \cdot x^2 + \overline{4c-b} \cdot x^3 + \&c.$$
$$- \overline{1 + x + ax^2 + bx^3 + \&c.}\, y -$$
$$\int \overline{1 - x + ax^2 - bx^3 + y} - \overline{2a-1} \cdot x + \overline{3b-a} \cdot x^2$$
$$- \overline{4c-b} \cdot x^3 + \&c. - 2x + N = 0,$$

faiſant $a = \frac{2 \cdot \overline{1-n}}{2 \cdot \overline{1-2n}}$, $b = \frac{2 \cdot \overline{2-n}}{3 \cdot \overline{2-2n}}\,a$, $c = \frac{2 \cdot \overline{3-n}}{4 \cdot \overline{3-2n}}\,b$, & ainſi de ſuite. Cette intégrale eſt finie toutes les fois que n eſt un nombre entier poſitif; donc dans tous ces cas, cette intégrale eſt ſous cette forme intégrale de l'équation propoſée. Plus n eſt grand, plus ces formes deviennent élevées; & n pouvant être ſuppoſé auſſi grand que l'on

Digitized by Google

veut, ſans que l'équation différentielle change de forme, pour cela, il eſt clair que cet abaiſſement peut s'étendre à l'infini. Cet exemple m'a encore été propoſé par M. de la Grange. *Voyez, ſur l'Intégration de l'Equation* $xy^2 - x - 2ny \cdot dx + xdy = 0$, *le troiſieme Volume des Mémoires de la Société de Turin.* On peut faire ſur ce cas les mêmes réflexions que ſur celui que je viens de traiter, on verra, en effet, que ſi je rends générale la forme de l'intégrale pour chaque valeur de n, & que je la différentie, j'aurai des différentielles de différens dégrés, mais que toutes ſe rapporteront au troiſieme dans ce cas particulier, parcequ'elles auront des facteurs plus ou moins élevés ; en ſorte que l'équation ſous la forme où elle ſe préſente, n'eſt que la vraie équation différentielle, produite par chaque forme & diviſée par un facteur qu'elle ſe trouve avoir accidentellement.

Maintenant pour dreſſer une Table de tous ces cas, il faut, ſans chaque forme d'intégrale des précédentes, chercher les conditions des coefficiens, pour que la différentielle ait un facteur d'un dégré plus ou moins élevé, obſerver les cas où ces conditions ne changent pas l'intégrale de forme, & en former une Table. Il faut remarquer maintenant, 1°. qu'en conſtruiſant cette Table, on parviendra à trouver pour chaque dégré d'équations différentielles, leur forme intégrale générale & indépendante de toute condition entre les coefficiens dont j'ai parlé ci-deſſus. 2°. Que cette Table ne contiendra par elle-même qu'un nombre fini de formes pour le cas où la formule d'intégrale eſt algébrique ; mais que pour les autres cas, elle en peut

Digitized by Google

contenir une infinité. Ceci ſeroit un bien grand inconvénient, & rendroit même preſque inutile tout l'appareil de la méthode, s'il n'y avoit pas moyen d'y remédier; mais d'abord il ſera aiſé de former une ſuite des différentes formes d'intégrales pour différens dégrés, qui, lorſque leurs coefficiens ont certaines conditions, s'abaiſſent à un même dégré, & on pourra chercher par les méthodes connues le terme général de cette ſuite, & la forme générale de ces conditions. D'ailleurs, 1°. le terme algébrique de chaque formule intégrale ſera toujours

$$\frac{a+b\frac{x}{p}+c\frac{y}{p}+d\frac{x^2}{p^2}+e\frac{xy}{p^2}+f\frac{y^2}{p^2}\cdots\cdots}{a'+b'\frac{x}{p}+c'\frac{y}{p}+d'\frac{x^2}{p^2}+e'\frac{xy}{p^2}+f'\frac{y^2}{p^2}\cdots\cdots}$$

ces ſuites étant toujours finies. 2°. La fonction tranſcendante ſera la ſomme de logarithmes de ſuites ſemblables; mais ſuppoſant ces ſuites les plus ſimples qu'il eſt poſſible, & le terme algébrique conſtant, il eſt clair que plus on prendra de ces logarithmes, plus le dégré de l'équation différentielle qui répond à la forme intégrale ſera élevé, quelque ſuppoſition que l'on faſſe; donc le nombre n'en pourra être indéfini pour un dégré donné; donc le nombre des fonctions logarithmiques plus élevées, ne le ſera pas non plus. Cela poſé, on aura pour chaque dégré un nombre fini de formes générales & indéfinies: on ſuppoſera l'équation propoſée, multipliée auſſi par une ſuite indéfinie: on la comparera avec l'équation différentielle que produit la forme générale, & on déterminera, par cette comparaiſon, tous les cas où une certaine valeur don-

Digitized by Google

née aux coefficiens de la différentielle & de l'intégrale, arrête ces ſuites à un nombre fini quelconque de termes, & produit l'abaiſſement cherché.

Ce que je viens de dire s'applique également, avec les réflexions convenables, aux cas où il y a un plus grand nombre de variables, où les différences montent à un dégré plus élevé, & même aux équations différentielles d'ordres plus élevés. On ſent, combien des Tables conſtruites ſelon ces principes, ſeroient utiles aux Géometres; puiſqu'aucune équation différentielle n'y échappant, tout Problême, dont l'équation différentielle ſe trouveroit d'une des formes compriſes dans les Tables, ſeroit dès-lors réſolu. Mais ces Tables s'arrêtent néceſſairement à un point quelconque; il faut donc donner une Méthode, d'y ſuppléer dans ces cas, qui puiſſe dès-lors ſervir à ſe paſſer de ces Tables, tant qu'elles reſteront à conſtruire. Soit, pour cela $A\,dx + B\,dy = 0$ une équation différentielle ſans radicaux, il ſuit de mes principes que, ſi je la multiplie par $\frac{a + b\frac{x}{p} + c\frac{y}{p} + d\frac{x^2}{p^2} + e\frac{xy}{p^2} + f\frac{y^2}{p^2} \cdots}{a' + b'\frac{x}{p} + c'\frac{y}{p} + d'\frac{x^2}{p^2} + e'\frac{xy}{p^2} + f'\frac{y^2}{p^2} \cdots}$, ces ſuites s'arrêtant toujours à un nombre fini de termes, elle deviendra une différentielle exacte: on ſait qu'elle eſt pour ce cas l'équation de condition. On ſuppoſera qu'elle ait lieu, & cette ſuppoſition donnera les valeurs des coefficiens des deux ſuites, & le point où elles doivent s'arrêter. Cette opération faite, on n'aura plus à intégrer qu'une différentielle exacte. Or, ces ſortes d'équations n'étant point

Digitized by Google

ſuſceptibles du ſecond abaiſſement, on ſait de quelles formes l'intégrale eſt ſuſceptible & où elle s'arrête.

Si A & B contenoient une ou pluſieurs fonctions affectées de radicaux, il faudroit que dans les deux ſuites ci-deſſus, ces fonctions fuſſent ſemblablement aux x & y. L'intégrale n'en peut point contenir d'autres, cette remarque eſt très importante pour les quadratures. *Voyez le Mémoire précédent.* Il en ſeroit de même ſi A & B contenoient des fonctions tranſcendantes; cela s'applique auſſi aux équations poſſibles à trois, quatre variables, &c. Si j'ai $A\,d^2x + B\,d^2y + C = 0$, en ſorte que A, B, C ſoient des fonctions algébriques de x, y, dx, dy, il eſt clair que cette équation, ſi elle eſt poſſible, deviendra une différentielle exacte, en ſe multipliant par une ſuite ſemblable à celle ci-deſſus, en regardant dx & dy comme deux nouvelles variables qui doivent y être homogènes entr'elles; mais on a les équations de condition pour ce cas, & elles ſerviront à trouver les coefficiens de cette ſuite & le point où elle finit. Cette ſuite trouvée, la Remarque II du IV Problême, donnera le moyen de traiter cette équation du ſecond ordre, comme une du premier. Quelle que ſoit la forme d'intégrale, dont ſoit ſuſceptible une différentielle du ſecond ordre, il eſt clair qu'on peut trouver en la multipliant par une fonction algébrique, & intégrant enſuite, chacune des deux différentes équations du premier ordre qui y répondent, & dont M. Fontaine a le premier connu l'exiſtence, la ſuite ſera donc ſuſceptible d'avoir deux valeurs; mais comme il peut arriver que

Digitized by Google

l'intégrale d'une des deux différentielles exactes qui y répondent, ne ſoit pas ſous une forme à y appliquer la Méthode pour avoir l'équation finie; s'il arrive qu'on choiſiſſe celle-là, on n'aura pas travaillé en pure perte pour cela, parceque trouvant l'autre équation du premier ordre, ſa comparaiſon avec la premiere, donnera l'intégrale finie par deux intégrations ſucceſſives aux différences premieres, de même que ſi on avoit choiſi celle à l'intégration, de laquelle on peut appliquer la Méthode ci-deſſus. Ce que je viens de dire du ſecond ordre eſt également vrai du troiſieme, du quatrieme, &c.; en ſorte que de quelqu'ordre que ſoit une équation différentielle, on n'aura jamais à intégrer, en effet, que des équations du premier ordre, dont l'intégrale ſe trouvera ſans difficulté d'après ce que je viens d'établir.

On ſent maintenant que pour ne laiſſer plus rien à deſirer ſur le Calcul Intégral, il ne me reſte plus qu'à donner un moyen d'intégrer les différentielles exactes, affectées de radicaux, c'eſt-à-dire, de les rappeller aux différentielles rationnelles: ſoit une équation du premier ordre qui contienne un radical d'une fonction de x & de y, je l'appelle z; & alors la fonction différentielle ſera une différentielle exacte d'une fonction de x, y, z; ou pour dz, on aura mis ſa valeur toujours rationelle, & x, y, z, dx, dy. Cela poſé, je dis, 1°. que l'intégrale de cette fonction ne pourra pas être plus élevée que celle de la plus haute fonction rationelle, qu'on peut avoir en mettant à la place de dx ſa valeur en dy & dz, & à la place de dy ſa valeur en dx & dz;

Digitized by Google

2°. que soit $Adz + Bdy$ la proposée, & $dz = A'dx + B'dy$. La formule

$$\frac{a+bx+cy+dz\cdots}{a'+b'x+c'y+d'z\cdots}dz + A - \frac{a+bx+cy+dz\cdots}{a'+b'x+c'y+d'z\cdots}A'dx + B - \frac{a+bx+cy+dz\cdots}{a'+b'x+c'y+a'z\cdots}B'dy$$

doit être une différentielle exacte d'une fonction de x, y, z. Cela servira à déterminer les coefficiens de la suite qui sera toujours finie, & on n'aura plus alors à intégrer qu'une fonction rationnelle. Cette méthode est, comme on voit, générale pour un nombre quelconque de radicaux.

Les équations aux différentielles partielles sont trop importantes pour que je puisse me refuser à joindre ici le moyen d'y appliquer la Méthode précédente. Soit donc une de ces équations du premier ordre entre z, x & y, je dis que si elle admet une solution complette, & qu'elle ne soit pas réductible à une équation ordinaire du même ordre, elle sera susceptible de la forme.

$$\frac{Adz + Bdy + Cdz}{Mdx + Ndy + Pdz} - \frac{Adx + C\frac{dz}{dx}dx}{Mdx + P\frac{dz}{dx}dx} = 0.$$

Comparant terme à terme, avec la proposée, on déterminera deux des A, B, C, en M, N, P, & on aura une équation entre M, N, P, ou réciproquement, & on déterminera le reste d'après ce que tous ces termes doivent être de la forme $\frac{a+bx+cy+dz\cdots}{a'+bx'+cy'+dz'\cdots}$ & que $Adx + Bdy + Cdz$, $Mdx + Ndy + Cdz$ doivent être des différentielles exactes; & alors l'intégrale sera

$$\int Adx + Bdy + Cdz + F \cdot \int Mdx + Ndy + Pdz = 0$$

Digitized by Google

ou bien que $Adx + Bdy + Cdz + Q \cdot \overline{Mdx + Ndy + Fdz}$ ſoit une différentielle exacte, Q pouvant contenir une tranſcendante; & alors l'intégrale de cette formule ſera l'intégrale cherchée. Ce dernier cas ne peut ſe diſtinguer à priori du premier, parcequ'il ſe peut rappeller à une équation du ſecond ordre ſans différences partielles. Le Problême ſe ſimplifieroit beaucoup, ſi on ſavoit qu'on pût faire $P = 0$; & les cas où cela eſt permis, peuvent auſſi ſe déterminer à priori.

Cette Méthode s'étend aux cas plus compliqués. J'avertirai ici en paſſant, que dans la formule $F\Phi xyz + F'\Phi' xyz$ de la page 89, & dans les formules ſemblables, que Φ peut contenir F', pourvu que F' ne ſe trouve point dans dF, & que cette ſuppoſition n'y introduiſe point de nouvelle tranſcendante.

On pourroit auſſi employer pour ces ſortes d'équations, la Méthode ſuivante, qui, ſans être générale, eſt aſſez étendue; ſoit une équation aux différences partielles en z, x & y. Je cherche à l'intégrer, en regardant x ſeul comme variable, & les $\frac{dz}{dy}$, &c. comme des fonctions de x; ſi j'y parviens en général, & qu'il me ſoit poſſible d'éliminer les $\frac{dz}{dy}$ à l'aide d'une équation entre z & y, on a à tirer de l'intégrale générale une valeur ſans dx : il ne ſera plus difficile de réſoudre la propoſée par les Méthodes ordinaires de Calcul Intégral. Tous les cas réſolus par M. de la Grange, ſont compris dans cette Méthode.

La Méthode du Problême III de la ſeconde Partie du Calcul intégral, n'eſt ni aſſez directe, ni aſſez ſimple, & manque

manque de cette analogie qui plaît tant. Voici des moyens d'y suppléer. D'abord, supposant que dans les équations de conditions que donne le Problême II, pour le cas du Problême III, on ait regardé comme nuls les termes multipliés par $V+V'+V''\ldots=0, \delta\cdot V+V'+V''\ldots=0$, &c. on substituera dans ces équations les valeurs des plus hautes différences, tirées de la proposée & de ses différences; & lorsque la proposée sera possible, toutes les équations précédentes se réduiront à une. En second lieu, les mêmes équations étant trouvées par le Problême III, il ne sera pas difficile d'en tirer une suite infinie d'équations semblables, dont la loi sera donnée, & qui contiendront également toutes les différences particlles de $A+A'+A''\ldots$ toûjours au premier dégré, je les regarderai chacune comme une variable particuliere, & j'aurai les équations de condition convenable par la formule en suite, qui se trouve à la suite du troisieme Mémoire.

La complication de ces équations est une conséquence nécessaire de la supposition qui a été faite pour représenter les diffences finies, sous la forme générale d'une suite infinie; mais on peut s'en passer, & avoir des équations de condition plus simples. 1°. Soit $V=\delta B$, $dV=d\cdot\delta B$, $\frac{dV}{dx}=d\cdot\frac{\delta B}{dx}$, $\frac{dV}{dp}=d\cdot\frac{\delta B}{dp}$; mais $d\cdot\frac{\delta B}{dx}=\delta\cdot\frac{dB}{dx}$, & $d\cdot\frac{\delta B}{dp}=\delta\cdot\frac{dB}{dp}$ + un terme qu'il faut chercher, ce terme est égal à ce que devient δB, en ne regardant comme variables, que les p que la différentiation fait naître. Or, il est clair qu'appellant B' ce que devient B, en faisant

$x = x + \delta x$ ou $x + p$, $p = p + \delta p$ ou $q \cdots$ & de même pour les autres variables, ce terme ſera la différentielle de B', en ne regardant comme variable que $x + p$, ſubſtitué à la place x, ce terme ſera donc $\frac{dB'}{dx}$; donc ſi la fonction eſt du premier ordre, $d \cdot \frac{\delta B}{dp}$ ſe réduiſant à ce terme, on aura $\frac{dV}{dx} = \delta \cdot \frac{dB}{dx}$, $\frac{dV'}{dp} = \frac{dB'}{dx}$; d'où $\frac{dV'}{dx} - \delta \cdot \frac{dV}{dp} = 0$ pour équation de condition; on en aura une ſemblable pour chaque variable. Il eſt aiſé de voir que cette Méthode s'étend à un ordre quelconque. 2°. On pourroit employer auſſi la Méthode d'intégrer par parties qu'emploie M. de la Grange; car intégrant ainſi ΣdV, les termes qui reſtent ſous le ſigne affectés de la caractériſtique d, doivent être nuls. 3°. Soit F une fonction finie, F' ſa ſeconde valeur, $F_{,}$ la valeur inférieure; la différence eſt $F' - F$: y mettant à la place de x, $x - \delta x$, & ainſi pour chaque variable, cette différence deviendra $F - F_{,}$; mais ſi on met à la place de δx, $-\delta x$, & de même pour les autres variables, on aura $F_{,} - F$; donc faiſant ſucceſſivement ces deux ſuppoſitions, lorſque la propoſée eſt une différence exacte, on doit avoir des quantités de ſignes différens. Cela s'applique aux ordres plus élevés *mutatis mutandis*. Les équations de condition pour la poſſibilité des équations ſe tirent immédiatement des deux premieres Méthodes qui conduiſent aux mêmes formules, & ſont ſuſceptibles des mêmes extentions que les Méthodes abſolu-

Digitized by Google

ment ſemblables, que j'ai données ci-devant pour les différences ordinaires. Ces ſortes d'équations de condition, peuvent auſſi ſe tirer de la derniere Méthode.

Lorſqu'on a une équation aux différences finies d'une forme finie, les tranſcendantes de l'intégrale s'y trouveront; ainſi dans ce cas, il ſera toujours facile d'intégrer les équations aux différences infiniment petites où elles ſe réduiſent.

FIN.

Digitized by Google

ERRATA.

PAGE 12, ligne 16, $y''x''$, mettez y'', x''.

Page 26, ligne 22, $dY + dQ$, mettez $dY'' + dQ'$; & $dZ + dR$, mettez $dZ' + dR'$. Ligne 24, dY'', mettez dY''. Ligne 25, dZ'', mettez dZ''.

Page 28, ligne 6, *à l'un ſeulement des facteurs du dénominateur*, au lieu de f'', mettez f'.

Page 50, ligne 5, *à compter par le bas*, la valeur de a, liſez la valeur de n.

Page 52, *lig.* 2, égale, *liſ.* égal. Ligne antépénultieme $1 - px^{p-1} + p - 1 \cdot x^p$, mettez $\overline{1 - p \cdot x^{p-1}} + \overline{p - 1 \cdot x^p}$.

Page 54, *ligne* 21, la ſomme, *liſez* le produit des puiſſances.

Page 55, *ligne* 7, ne pouvant, *liſez* ne peuvent. *Ligne* 10, dans, *liſez* par.

Page 56, *ligne* 16, *otez* en.

Page 63, *ligne* 21, avant le ſecond alinéa, *ajoutez*, il ne ſera peut être pas hors de propos d'obſerver ici, que depuis l'impreſſion de cette Concluſion, de nouvelles Réflexions m'ont conduit à trouver de nouvelles preuves directes & analitiques de mon ſentiment ſur la Méthode de M. d'Alembert: elles me paroiſſentétablir démonſtrativement, que cette Méthode eſt ſuffiſante pour réſoudre le Problême des trois Corps par Approximation, ſous quelque forme qu'il ſe préſente.

Page 66, *ligne* 19, $\prec 0$, *mettez* $\succ 0$. *Ligne* antépénultieme, ou 0, *mettez* ou $\prec 0$.

Page 72, *ligne* antipénultieme, *après* l'infini, *ajoutez* car.

Page 73 *ligne* 18, $+y$, *mettez* $+$ &c. y; *au bout de la même ligne*, *ajoutez* $+$ &c. *Ligne antipénultieme*, forme intégrale, *liſez* forme l'intégrale.

Page 74, *ligne* 8, on verra, *liſez* on voit. *Ligne* 18, ſans chaque forme d'intégrale des précédentes, *liſez* ſous chaque forme d'intégrale des Tables précédentes.

Page 77, *ligne* 5, fuſſent, *liſez* entraſſent.

Page 79, ligne 1, *Adz*, mettez *Adx*. Ligne 22, $bx' + cy' + dz'$, mettez $b'x + c'y + d'z$.

Page 80, *ligne* 4, *otez* ne. *Ligne* 22 & 23, on a à tirer, *liſez* ou à en tirer.

FIN de l'Errata.

Digitized by Google

Digitized by Google